محاضرة رقم (09)

امثلة مهمة حول

محاضرة Root locus

* تم توضيح بالمحاضرة السابقة (lec-8) بان طريقة root locus هي طريقة لتحديد استقرارية closedloop اعتماداً على الـ openloop (GH) وتتضمن اجراء مجموعة من الخطوات لغرض رسم حركة الجذور عندما k تتغير من $(0 \to \infty)$ في الامثلة السابقة المعادلات لم تتضمن complex root لذا فان هذه المحاضرة سوف تتضمن بعض الاسئلة التي تتضمن complex root وكما يلي

EX1 (problem of 10.6 from ch 10)

sketch the root-locus plot and determine damping ratio (ξ) for $k = 1.33$.

$$G(s) = \frac{k(s+2)}{s^2+2s+3}, \quad H = 1$$

الحل يتم اعتماد معادلة O.L.T.F = GH

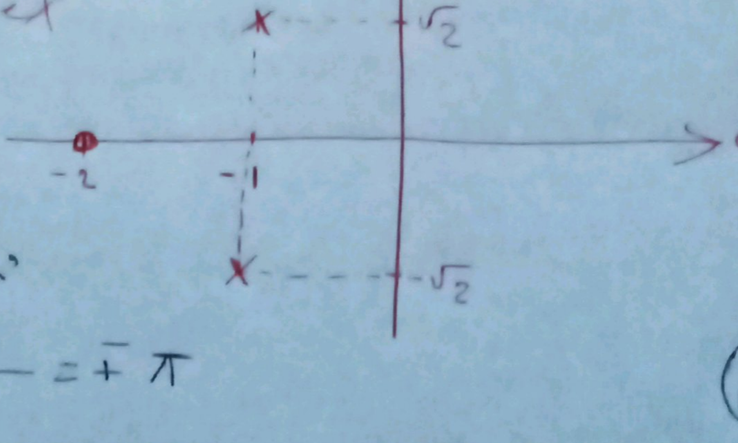
$$O.L.T.F = G(s)H(s) = \frac{k(s+2)}{s^2+2s+3}$$

① No. of $m = 1$, $s = -2$

نلاحظ ان هذه المعادلة فيها one zero + 2 poles

no. of poles $n = 2$

$s_{1,2} = -1 \mp \sqrt{2}j$ ⟸ complex



② No. of asymptot $n - m = 1$

θ_0 ∴ لدينا زاوية واحدة فقط

$$\theta_0 = \frac{\mp \pi(2i+1)}{n-m} = \frac{\mp \pi}{1} = \mp \pi$$

$\therefore 1+GH=0$ حساب نقاط التوقف (break point)

$$1+\frac{k(s+2)}{s^2+2s+3}=0$$

$$\frac{s^2+2s+3+k(s+2)}{s^2+2s+3}=0 \Rightarrow k=\frac{-(s^2+2s+3)}{(s+2)}$$

تم ايجاد k

لغرض ايجاد نقاط break

بعدها يتم اشتقاق معادلة k نسبة لـ s $\frac{dk}{ds}=0$

$$\frac{dk}{ds}=\frac{-[(s+2)*(2s+2)-(s^2+2s+3)*1]}{(s+2)^2}=0$$

$$=[-[s^2+4s+1]=0]*-1$$

$$=s^2+4s+1=0 \;\; \begin{cases} s_1=-3.732 \xrightarrow{\text{تم تعويضها في } k} k|_{s_1}=+ve \\ s_2=-0.268 \longrightarrow \boxed{k|_{s_2}=-ve} \end{cases}$$

هذه ليست نقطة توقف لان k سالبة لذلك فان

$\boxed{s_1=-3.732}$ break point لانها اعطت k موجبة

(4) intersection point with Imag. axis

تم ايجاد نقطة التقاطع مع المحور الخيالي (العمودي) حسب المعادلة التالية

$$1+GH=0 \Rightarrow s^2+2s+3+k(s+2)=0$$

نفرض $s=j\omega$ $\xrightarrow{\text{تعويض}}$ $-\omega^2+2j\omega+3+kj\omega+2k=0$

يتم فصل real part و Imag. part $\quad(-\omega^2+3+2k)+j\omega(2+k)=0+0j$

نساوي الجزء الخيالي $=0$ $\Rightarrow \omega(2+k)=0 \Rightarrow \omega=0$

يتم تعويضها بالجزء الحقيقي $\quad -(\omega^2+3+2k)=0$

$$0+3+2k=0 \Rightarrow \boxed{k=\frac{-3}{2}}$$

تهمل لان k يجب ان تكون موجبة لذلك تكون

range of k is $0<k<\infty$

5 angle of dep. & angle of arrival

المغادرة　　　　　الوصول

* يتم حساب زاوية المغادرة في حالة وجود Complex poles
* يتم حساب زاوية الوصول في حالة وجود Complex Zero

في هذا السؤال لدينا Complex poles لذا نحتاج حساب angle of dep

بصورة عامة قانون حساب (angle of departure) and angle of arrival

$$\text{angle of dep.} = 180 - \underbrace{\Sigma\theta_p}_{\text{poles مجموع زوايا الـ}} + \underbrace{\Sigma\theta_z}_{\text{مجموع زوايا Zero}}$$

$$\boxed{\text{angle of arrival} = 180 + \Sigma\theta_p - \Sigma\theta_z}$$

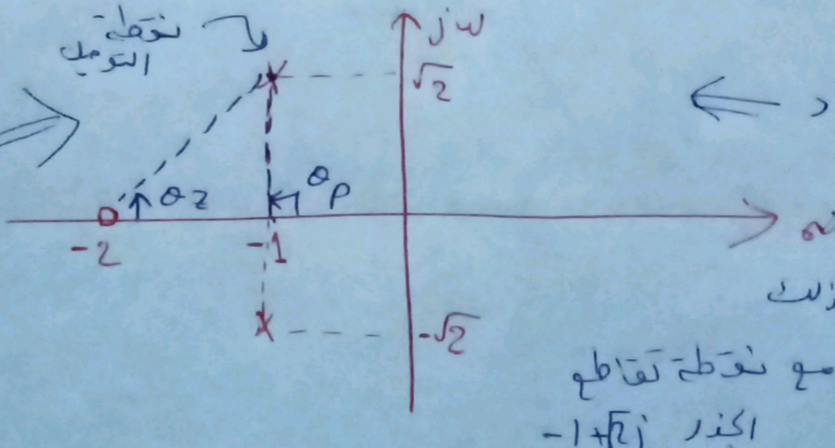
هذا القانون يشبه القانون (زاوية المغادرة) فقط الاختلاف بالاشارة

* في السؤال لدينا complex poles لذلك يجب فقط حساب

$$\text{angle of dep.} = 180 - \Sigma\theta_p + \Sigma\theta_z$$

يتم حسابها من تأثير الزاوية لـ poles و zero بعد تحديد نقطة توصيل مع احد complex poles

نقوم بتوصيل اي poles او Zero مع جذر $-1+\sqrt{2}j$



نلاحظ وجود Zero $(s=-2)$ و Pole $(s=-1-\sqrt{2}j)$ لذلك تم توصيلهما مع نقطة تقاطع الجذر $-1+\sqrt{2}j$

* نلاحظ ان الجذر $-1-\sqrt{2}j$ يقع بزاوية 90° مع نقطة التقاطع $(-1+\sqrt{2}j)$

بينما زاوية الـ Zero $(s=-2)$ يوجد مثلث لذلك نوجد الزاوية له بالقانون التالي

$$\theta_z = \tan^{-1}\frac{Imag.}{real}$$

* جزء Imag. هو دائماً قيمة الجذر التخيلية والتي في هذا السؤال $\sqrt{2}$

اما real فهي مسافة البعد (الاحداثي x) مابين القيمة الحقيقية لنقطة التقاطع $(-1+\sqrt{2}j)$ هنا (-1) ومابين قيمة $(s=-2)$

وبدون اشارة (الاشارة موجبة تؤخذ).

* في هذا السؤال المسافة بين (-1) و (-2) هي (1) وتؤخذ موجبة لذا تكون $(+1)$ لذلك فان

$$\theta_z = \tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{1} = 55^\circ$$

$$\therefore \text{angle of dep} = 180 - \Sigma\theta_p + \Sigma\theta_z$$

$$= 180 - \theta_{p_1} + \theta_{z_1}$$

$$= 180 - 90 + 55 = \boxed{145^\circ}$$

* لغرض الرسم النهائي يتم تأشير كل المعلومات التي تم الحصول عليها

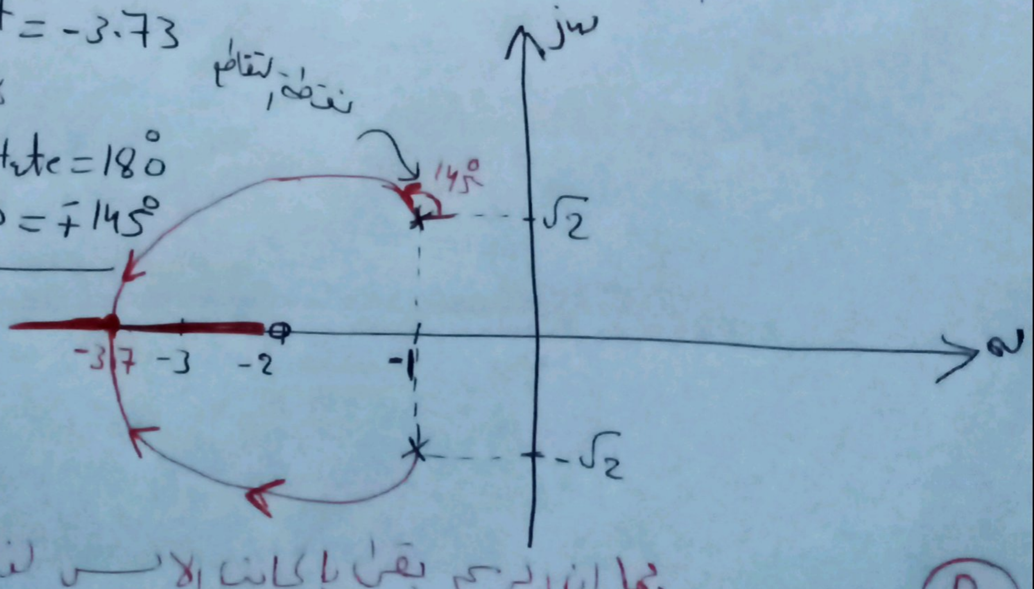
(break in) breakpoint $= -3.73$

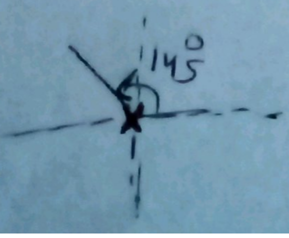
لا يوجد تقاطع مع Imag.

angle of amptite $= 180^\circ$

= = dep $= \mp 145^\circ$

يتم تحديدها ضمن نقطة التقاطع $(-1+\sqrt{2}j)$





بما ان الرسم يقع بالجانب الايسر لذلك

$0 < K < \infty$

ايضاً مطلوب بالسؤال تحديد قيمة (ζ) عندما $K=1.33$ لذلك نقوم
بتعويض قيمة K بالمعادلة ونساوي المعادلة بـ (-1) وكما يلي

$$\frac{K(s+2)}{s^2+2s+3} = -1 \Rightarrow \frac{1.33(s+2)}{s^2+2s+3} = -1$$

بعد التبسيط نحصل على

$$-s^2-2s-3 = 1.33s + 2.66$$

$$\underbrace{s^2+3.33s+5.66}=0$$

$$= s^2+2\zeta w_n s+w_n^2$$

تم مقارنتها مع المعادلة الرئيسية للنظام الدرجة الثانية

$$\frac{w_n^2}{s^2+2\zeta w_n s+w_n^2}$$

* من المقارنة نجد

$$w_n = 2.37 \Leftarrow w_n^2 = 5.66$$

$$2\zeta w_n = 3.33 \Rightarrow \zeta = \frac{3.33}{2*2.37} = 0.703$$

---

* تم ملاحظة الأسئلة المحلولة ضمن الفصل (10) من كتاب الامثلة والذي يحتوي على عدد من الامثلة الجيدة وخاصة الاسئلة المحلولة

التي بها Complex poles or
Complex Zero