Measures of Dispersion: can be divided into two parts which are:

1- Absolute Measurements: which included:

a- Range

b- Mean Deviation (M.D)

c- Variance

d- Standard Deviation (S.D)

2- Relative Measurements: which included:

1- Coefficient of Variation (C.V)

2- Standard Score (Z)

1- Range: the difference between the largest and smallest numbers.

$$\boldsymbol{R = x_{max} - x_{min}}$$

عيوبه : لا يعطي الإختلاف بصورة دقيقة ، مميزاته : سهولة حسابه

Example: for the following data (40, 30, 26, 5, 10, 15)

$R = x_{max} - x_{min} = 40 - 5 = 35$

2- Mean deviation (M.D): هو عبارة عن معدّل مجموع إنحرافات القيم عن وسطها الحسابي مع إهمال الإشارة ويحسب بالصيغة التالية :

a- for standard class:

$$\boldsymbol{M.D = \frac{\sum|x_i - \bar{x}|}{N}}$$

Example:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
5	-5	5
15	$+5$	5
8	-2	2
7	-3	3
15	$+5$	5

$$\bar{x} = \frac{50}{5} = 10$$

$$M.D = \frac{\sum|x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{20}{5}$$

$$M.D = 4$$

$\sum x_i = 50$	20

b- for grouped class:

$$\boldsymbol{M.D = \frac{\sum f_i|x_i - \overline{x}|}{\sum f_i}}$$

Example:

Class	f_i	**Class Mark** x_c	$x_c - \overline{x}$	$\lvert x_c - \overline{x}\rvert$	$f_i\lvert x_c - \overline{x}\rvert$	$f_i x_c$
$60-62$	5	61	-6	6	30	305
$63-65$	18	64	-3	3	54	1152
$66-68$	42	67	0	0	0	284
$69-71$	27	70	3	3	81	1890
$72-74$	8	73	6	6	48	584
	$\sum f_i = 100$				213	$\sum f_i x_c = 6754$

$$\boldsymbol{M.D = \frac{\sum f_i|x_i - \overline{x}|}{\sum f_i}} = \frac{213}{100} = 2.13$$

3- Variance: هو عبارة عن معدّل مجموع مربعات إنحرافات القيم عن وسطها الحسابي ويحسب بالصيغة التالية:

a- for standard class:

الطريقة المطوّلة	**الطريقة المختصرة**
$\boldsymbol{Var = S^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{N-1}}$	$\boldsymbol{Var = S^2 = \frac{\sum(x_i)^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{N}}{N-1}}$

Example:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
5	-3	3
9	$+1$	1
5	-3	3
10	$+2$	2
11	$+3$	3
$\sum x_i = 40$		32

$$\bar{x} = \frac{40}{5} = 8$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1} = \frac{32}{5-1} = \frac{32}{4}$$

$$S^2 = 8$$

b- for grouped class:

الطريقة المطوّلة	الطريقة المختصرة
$\boldsymbol{S^2 = \frac{\sum f_i (x_c - \bar{x})^2}{\sum f_i - 1}}$	$\boldsymbol{S^2 = \frac{\sum (f_i x_c)^2 - \frac{(\sum f_i x_c)^2}{N}}{\sum f_i - 1}}$

4- Standard Deviation (S.D): هو الجذر التربيعي للتباين

Example: For the following frequency table for some wages' workers; find variance and standard deviation

Class	$\boldsymbol{f_i}$	**Class Mark** $\boldsymbol{x_c}$	$\boldsymbol{f_i x_c}$	$\boldsymbol{(x_c - \bar{x})^2}$	$\boldsymbol{f_i (x_c - \bar{x})^2}$
$16-21$	15	18.5	277.5	134.09	2011.35
$22-27$	16	24.5	392	31.13	498.08
$28-33$	25	30.5	762.5	0.17	4.25
$34-39$	20	36.5	730	41.21	824.2
$40-45$	10	42.5	425	154.25	154.25
	$\sum f_i = 86$		2587		4880.38

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{2587}{86} = 30.08$$

$$S^2 = \frac{\sum f_i (x_c - \bar{x})^2}{\sum f_i - 1} = \frac{4880.38}{86 - 1} = 57.41$$

$$S = \sqrt{57.41} = 7.57$$

خواص الإنحراف المعياري :

1- خاصية الجمع : إذا كان لدينا بيانات $[x_1,\ x_2,\ x_3, \dots ,\ x_N]$ وأضيف لها عدد ثابت (C) فإن البيانات الجديدة (y) لا تتغير قيمة الإنحراف المعياري لها

Prove:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i + C - (C + \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sigma_x$$

2- خاصية الضرب :

For $x = x_1,\ x_2,\ x_3, \dots ,\ x_N;\ y = Cx = Cx_1,\ Cx_2,\ Cx_3, \dots ,\ Cx_N \rightarrow \sigma_y = C\sigma_x$

Prove: $\sigma_y = C\sigma_x$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i . C - (C . \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{C^2 \sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = C\sigma_x$$

2- Relative Measurements: which included:

1- Coefficient of Variation (C.V):

يستخدم للتخلّص من الوحدات والمقارنة بين نوعين من المقاييس ويحسب بالعلاقة التالية :

$$\boxed{C.V = \frac{S}{\bar{x}} \times 100}$$

Where: : standard deviation, $\bar{x}$: Mean

2- Standard Score (Z)

تستخدم للتخلّ من وحدات القياس الأصلية وجعل البيانات تتبع في توزيعها التوزيع الطبيعي لوسط حسابي = صفر وتباين = 1

$$\boxed{\boldsymbol{Z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}}} \qquad \boldsymbol{i.e.\, Z_i \sim N(0,1)}$$

مثال : طالب حصل على درجة 84 في مادة الإحصاء في حين كان الوسط الحسابي لمعظم درجات الطلبة هو 76 والإنحراف المعياري 10 وحصل على درجة 90 في مادة الرياضيات وكان الوسط الحسابي لدرجات الطلبة هو 82 والإنحراف المعياري 16 . أوجد النسبة في أي المادتين كان افضل ؟

1. Using Coefficient of Variation:

For Statistic: $C.V = \frac{S}{\bar{x}} \times 100 = \frac{10}{76} \times 100 = 13.15\%$

For Mathematic: $C.V = \frac{S}{\bar{x}} \times 100 = \frac{16}{82} \times 100 = 19.51\%$

2. Using Standard Score:

For Statistic: $Z = \frac{x_i - \bar{x}}{S} = \frac{84 - 76}{10} = 0.8$

For Mathematic: $Z = \frac{x_i - \bar{x}}{S} = \frac{90 - 82}{16} = 0.5$

	$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{\bar{x}}$	$\boldsymbol{S}$	$C.V$	Z
Statistic	84	76	10	13.15%	0.8
Mathematic	90	82	16	19.51%	0.5