Lec- 2 -

تكملة موضوع polar method

$GH(j\omega) \leftarrow GH(s)$ تحويل معادلة ① تتضمن polar method ملخص طريقة *

② حساب $M + \Phi$ عند الترد Zero وتردد ∞

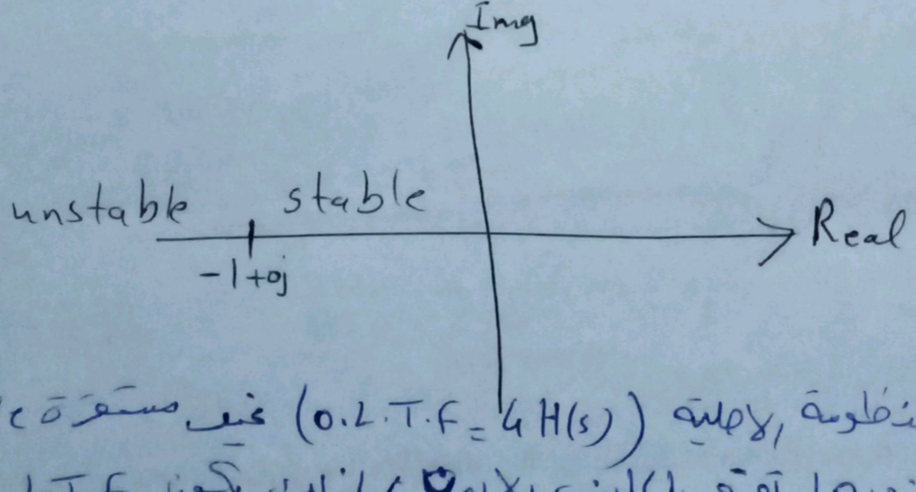
③ تحديد النقاط $GH(0j)$ و $GH(\infty j)$ على احداثي Polar axis

④ ملاحظة الرسم على polar axis اذا كان قبل النقطة $(-1+0j)$ او بعد لمعرفة ان C.L.T.F هو stable او لا

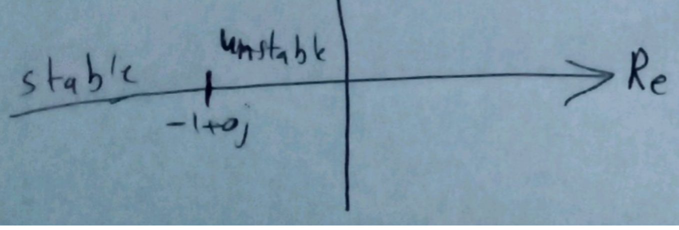
⑤ اذا كان يوجد نقطة تقاطع مع الاحداثي x-axis (في الجانب الايسر) يتم ايجاد هذه النقطة لمعرفة انها تكون قبل $(-1+0j)$ او بعدها

⑥ اذا كان المنظومة الاصلية $(O.L.T.F = GH(s))$ مستقرة لان جميع جذورها تقع بالجانب الايسر ، لذلك يكون C.L.T.F مستقر ايضا اذا رسم polar يقع قبل النقطة $(-1+0j)$

① if $GH(s) \xrightarrow{\text{stable}}$ then C.L.T.F stable if polar plot lie in right side of $(-1+0j)$ point



⑦ اذا كانت المنظومة الاصلية $(O.L.T.F = GH(s))$ غير مستقرة unstable لان احد جذورها تقع بالجانب الايمن ، لذلك يكون C.L.T.F مستقر اذا رسم polar يقع بعد النقطة $(-1+0j)$



*ملاحظة كلمة stable تسمى ايضا Minimumphase

كلمة unstable تسمى ايضا (Non minimumphase)

* الامثلة التالية توضح الخطوات السابقة

EX2: draw polar plot and Comment on stability for O.L.T.F & C.L.T.F for system $GH = \frac{k}{(s+1)(2s+1)(0.5s+1)}$

sol $GH(s) = \frac{k}{(s+1)(0.5s+1)(2s+1)} \Rightarrow GH(jw) = \frac{k}{(jw+1)(0.5jw+1)(2jw+1)}$

$M = |GH(jw)| = \frac{k}{\sqrt{1+w^2} * \sqrt{1+(0.5w)^2} * \sqrt{1+(2w)^2}}$

ϕ = (مجموع زوايا البسط) − (مجموع زوايا المقام)

$= \underbrace{\tan^{-1}\frac{0}{k}}_{\text{زاوية } k = 0} - \left(\tan^{-1}\frac{w}{1} + \underbrace{\tan^{-1}\frac{0.5w}{1}}_{\text{زاوية الحد } (0.5jw+1)} + \underbrace{\tan^{-1}\frac{2w}{1}}_{\text{زاوية الحد } (2jw+1)}\right)$

ثابت

معامل j

$\phi = 0 - \tan^{-1}w - \tan^{-1}0.5w - \tan^{-1}2w$

$GH(0j) = M\angle\phi$ at (w = Zero)

$GH(0j) = k\angle 0^\circ$

تم حساب M بتعويض w=0 بمعادلة M او GH(jw) ويقفل GH(jw)

$GH(\infty) = 0\angle -270^\circ$

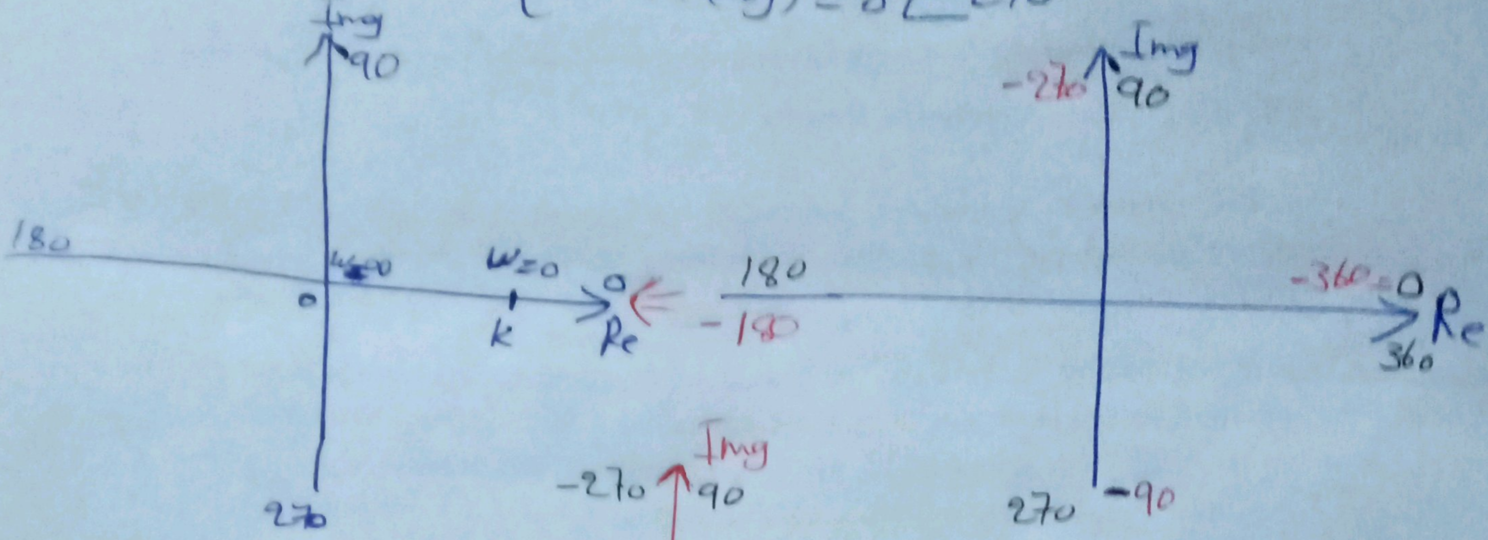
$\Uparrow$

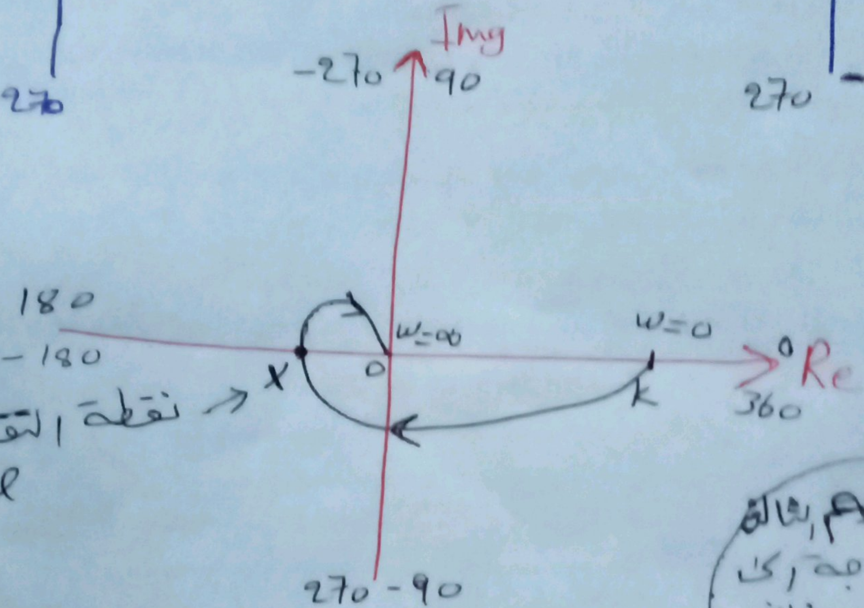
تم حساب الزاوية ϕ عند w = 0 او w=∞ بتعويض w بمعادلة ϕ

$\phi(w=\infty) = -\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}(0.5*\infty) - \tan^{-1}(2\infty)$

$= -90 - 90 - 90 = -270^\circ$

* يتم تلاشي التقاطع $GH(0j) = K\angle 0^\circ$ & $GH(\infty j) = 0\angle -270$ عند polar axis





نقطة التقاطع مع الاحداثي real

ملاحظة تم الرسم بالحالة مباشرة دون الحاجة الى ذكر الرسم الاول والثاني

تم الرسم من الاسفل وذلك لان الفرق بين زاوية البداية $\phi = 0$ وزاوية النهاية $= -270$

$$0 - 270 = -270$$

لذلك نتحرك من الاسفل وخلال ثلاثة ارباع وباتجاه عقرب الساعة

* نلاحظ وجود نقطة تقاطع (X) مع محور الحقيقي لذلك يجب ايجاد هذه القيمة وذلك باستخدام قانون التالي

$$G(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$$

يتم هنا الضرب بالمرافق ⇒

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)(1+2j\omega)(1+0.5j\omega)} * \frac{(1-j\omega)(1-2j\omega)(1-0.5j\omega)}{(1-j\omega)(1-2j\omega)(1-0.5j\omega)}$$

$$= \frac{K(1-0.5j\omega-3j\omega-1.5\omega^2+j\omega^3)}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)(1+0.25\omega^2)}$$

يتم فصل العدد الحقيقية عن العدد الخيالية

$$G(jw) = \underbrace{\frac{K(1-3.5w^2)}{(1+w^2)(1+4w^2)(1+0.25w^2)}}_{X(w)} + j\underbrace{\frac{K(w^3-3.5w)}{(1+w^2)(1+4w^2)(1+0.25w^2)}}_{y(w)}$$

* يتم مساواه الجزء الخيالي $y(w) = 0$ لايجاد قيمة $\underline{\underline{w}}$ وبعدها يتم تعويضها في معادلة $X(w)$

$$\frac{K(w^3-3.5w)}{(1+w^2)(1+4w^2)(1+0.25w^2)} = 0$$

$$K(w^3-3.5w) = 0 \Longrightarrow w(w^2-3.5) = \frac{0}{k} = 0$$

$$w = 0$$

$$\text{or } w^2 = 3.5 \Longrightarrow w = \mp 1.87 \text{ rad/sec}$$

* يتم اخذ الجزء الموجب فقط $(w=+1.87)$ و نعوض بالجزء الحقيقي $X(w)$

$X(w)$ نقطة التقاطع مع المحور الحقيقي

$$X(w) = \frac{K(1-3.5\times3.5)}{(1+3.5)(1+4\times3.5)(1+(0.25\times3.5))}$$

$$\boxed{X(w) = -0.088k}$$

هذه النقطة بها k لذلك لا يمكن ان نعرف هل هي قبل -1 او بعدها لذلك نكتب

since O.L.T.F stable then

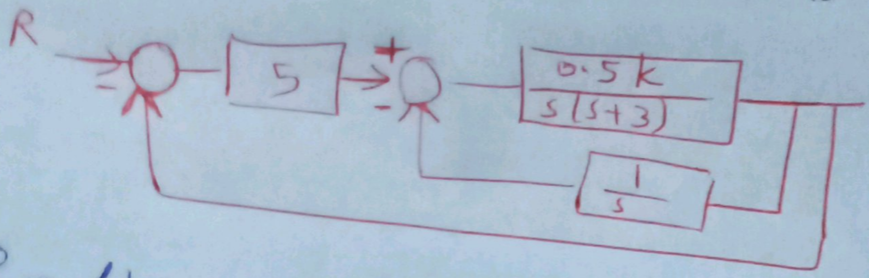
① if $0.088k > 1$ then C.L.T.F unstable

② if $0.088k < 1$ then C.L.T.F stable

③ if $0.088k = 1$ then C.L.T.F crtical stable

H.w 1: draw polar plot for unity f/b system with open loop $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(3s+1)}$

H.w 2: draw polar plot for system shown in Figure below



EX3: for the control system with O.L.T.F

$$G(s) = \frac{5(1+2s)}{s^2(1+s+s^2)}, \quad H=1$$

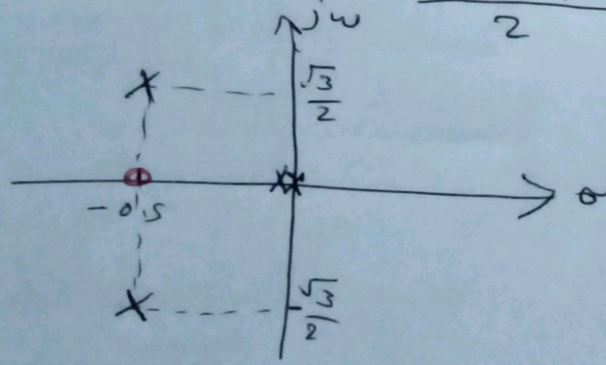
draw polar plot and comment on the stability of the O.L & C.L

sol $O.L.T.F = G(s)H(s) = \frac{5(2s+1)}{s^2(s^2+s+1)}$

zero $\Rightarrow s = -\frac{1}{2}$

جذور $GH(s)$ تقع بالجانب الايسر

Poles $\Rightarrow s_{1,2} = 0, \; s_{3,4} = \frac{-1 \mp \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \mp \sqrt{3}j}{2}$



جميع الجذور تقع بالجانب الايسر لذلك فان O.L.T.F stable (Min. phase)

* اما طريقة Polar plot فنستخدم لتحديد استقرارية C.L.T.F

$$GH(j\omega) = \frac{5(2j\omega+1)}{(j\omega)^2(j\omega^2+j\omega+1)}$$

$$= \frac{5(2j\omega+1)}{-\omega^2(-\omega^2+j\omega+1)} = \frac{5(2j\omega+1)}{-\omega^2((1-\omega^2)+j\omega)}$$

$$\therefore M = |GH(j\omega)| = \frac{5 * \sqrt{1+(2\omega)^2}}{\sqrt{(-\omega^2)^2} * \sqrt{\omega^2 + (1-\omega^2)^2}}$$

معامل j   real جزء

ملاحظة كل s او jω زاويتها 90
كل s² او (jω)² زاويتها 180

$$= \frac{5\sqrt{1+4\omega^2}}{\omega^2 * \sqrt{\omega^2+(1-\omega^2)^2}}$$

$\Phi =$ مجموع زوايا البسط − مجموع زوايا المقام

$$\Phi = \left(\tan^{-1}\frac{0}{5} + \tan^{-1}\frac{2\omega}{1}\right) - \left(180 - \tan^{-1}\frac{\omega}{(1-\omega^2)}\right)$$

معامل j — real part

$$\Phi = +\tan^{-1}\frac{2\omega}{1} - 180 - \tan^{-1}\frac{\omega}{1-\omega^2}$$

$GH(0j) = \infty \angle -180^\circ \leftarrow \Phi(\omega=0) = \tan^{-1}0 - 180 - \tan^{-1}0 = -180^\circ$

يتم ايجاد بتعويض ω بمعادلة GH

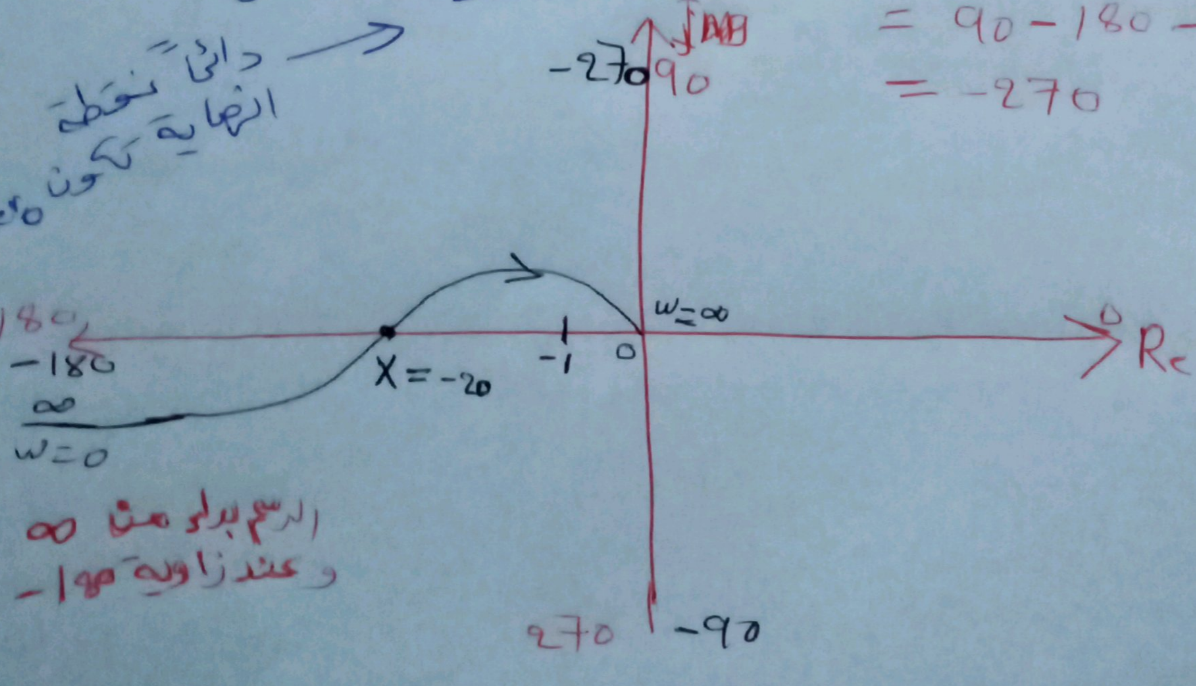
خاصة بـ 2poles لذلك = −180   كل زاوية عندها تكون 90

$GH(\infty j) = 0 \angle -270 \leftarrow \Phi(\omega=\infty) = \tan^{-1}\infty - 180 - \tan^{-1}\frac{\infty}{1-\infty^2}$

$= 90 - 180 - 180$

$= -270$

دائماً نقطة النهاية تكون zero



الرسم يبدأ من ∞
وعند زاوية -180

* نلاحظ من الرسم وجود نقطة تقاطع X لذلك يتم ايجادها

$$\therefore H(jw) = X(w) + jY(w)$$

* ضرب المعادلة بالمرافق

$$\text{المعادلة} = \frac{5(1+2jw)}{(jw)^2(1+jw-w^2)} * \frac{(-jw)^2(1-jw-w^2)}{(-jw)(1-jw-w^2)}$$

يتم تغيير اشارة الجزء الخيالي فقط

$$\therefore H(jw) = \frac{5(1+2jw)(-w^2+w^4+jw^3)}{w[(1-w^2)^2+w^2]}$$

يتم فصل الحدود الحقيقية عن الحدود الخيالية

$$= \underbrace{\frac{5(-w^2+w^4-2w^4)}{w^4[(1-w^2)^2+w^2]}}_{X(w)} + j\underbrace{\frac{-5(2w^5-w^3)}{w^4[(1-w^2)^2+w^2]}}_{Y(w)}$$

يتم مساواة $Y(w) = 0$ لايجاد w

$$-5(2w^5-w^3) = 0 \Rightarrow w^3(2w^2-1) = 0$$

$$w = 0$$

$$2w^2 = -1 \Rightarrow w = \mp\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{w = 0.707 \text{ rad/sec}}$$

نعوض $X(w) \leftarrow$ نأخذ الموجب فقط

$$X(w) = \frac{5(-0.5+(0.707)^4-2(0.707)^4)}{(0.707)^4[(1-(0.707)^2]^2+0.5}$$

$$X(w) = \underline{\underline{-20}} \Longrightarrow$$ نقطة التقاطع تقع بعد $(-1+0j)$

لذلك فان C.L.T.F unstable

P7