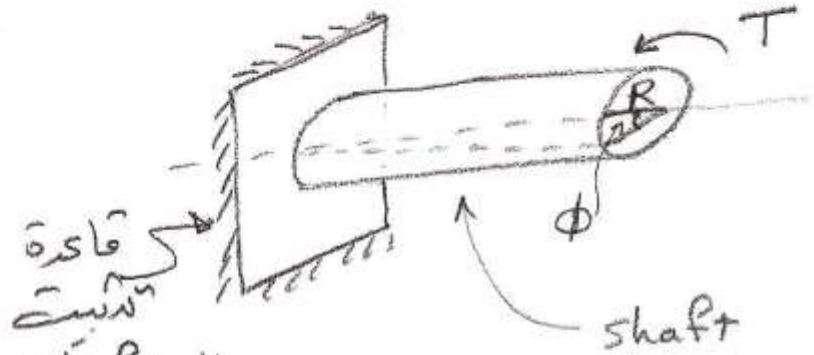
① Torsion

تعاريف :-

M :- moment عزم يسبب تقوس Bending في ال member هذا التقوس يسبب تشوه يسمى deflection شكل :-

T :- Torque وهو عزم يسبب دوران Rotation في ال shaft ، هذا اللي يسبب تشوه بمقدار ϕ شكل :-



$strain = \phi \cdot R$

ملاحظة :- اذا كان ال shaft مسلط عليه Torque مقدار T ولا توجد قاعدة تثبيت لكان ال shaft يدور باتجاه T بحرية دون وجود إجهادات داخلية تلا يحصل اجهادات Torsion ولا يوجد تشوه في ال shaft ، الا ان قاعدة تثبيت ال shaft تعيقه من الدوران مسببة اجهادات Torsion وحصول تشوه يسمى (strain)

(2) Torsion

س/ ماهي التطبيقات العملية لـ Torque ؟

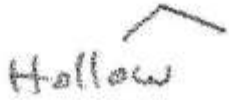
ج/ ناقل الحركة (الاكسل) الموجود بين محرك السيارة وناقل الحركة الـ gear .

س/ ماهي انواع المقاطع العرضية لـ Shaft ؟

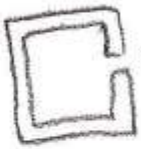
ج/ يكون اما

دائري مصمت
solid

دائري مجوف
Hollow



مصمت مجوف



- ممكن ان يكون على عدة اشكال من المقاطع
- ممكن ان يكون مثلا عدة انواع من المواد (المنيوم، حديد، الخ)
- وله عدة تسميات مثل Rod ، member

س/ ماهي شروط الـ Torsion ؟

ج/ عند تسليط طي (Torque) يسبب دوران (Twist) في اي Rod فان المقطع العرضي (cross section) يبقى محافظ على شكله بعد تسليط الـ Torque كما هو فاذا كان دائري يبقى دائري ، واذا كان المقطع مربع يبقى مربع.

(3) Torsion

تعاريف :

G (Torsional Rigidity) :- هي مقدار تحمل مادة ال Rod الى اللي (Torque) المسلط عليه قبل ان يحصل فيه تشوه

قوانين :

$$\frac{\tau}{R} = \frac{T}{J} = \frac{G\phi}{L}$$ (قانون)

τ = shear stress (MPa) N/mm^2

R = Radius of Rod (shaft, member) mm

T = Torque (N.mm)

J = Polar moment of Inertia $[mm^4]$
(second moment of Area)

G = Modulus of Rigidity (MPa)
معامل الصلادة

ϕ = Angle of Twist (only in Rad)

L = Length of Rod (mm)

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

$$\tau = \frac{TR}{J}$$

$$\text{strain } \gamma = R\phi$$

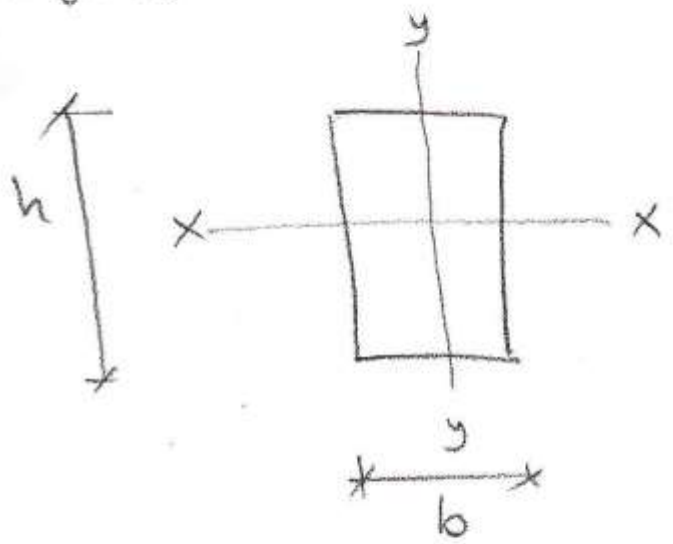
$$\tau_{max} = G \cdot \gamma_{max}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

(4) Torsion

Q/ What is Polar moment of Inertia J ?

A/ for the Rectangular section



- لحساب عزم العطور الذاتي حول محور الـ x يكون كما يلي :

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

ويمثل دوران مقطع الجسم حول محور x .

- ولحساب عزم العطور الذاتي حول محور الـ y يكون كما يلي :

ويمثل دوران مقطع الجسم حول محور y

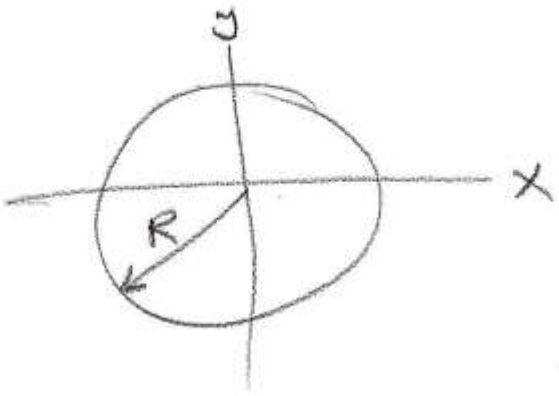
$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

- ولحساب عزم العطور الذاتي حول محور الـ z ويكون هنا عمودي على الورقة وهو نفسه J لذلك وحدته هي mm^4

$$I_z = I_x + I_y = J$$

(5) Torsion

اما بالنسبة للمقطع الدائري



$$I_x = \frac{\pi}{4} R^4$$

$$I_y = \frac{\pi}{4} R^4$$

$$I_z = J = I_x + I_y$$

$$= \frac{\pi}{4} R^4 + \frac{\pi}{4} R^4$$

$$= \frac{\pi}{2} R^4 \quad (J \text{ for circular cross section solid})$$

س/ ايهما افضل تستخدم ال shaft المجوف ام الصلد

Hollow or solid shaft

ج/ المجوف افضل والسبب اعتمادا على القانون التالي

$$\tau = \frac{TL}{J}$$

لان J بالمقام تكلما تزداد قيمة J تقل مقدار الاجهادات التي تتحمل ال shaft

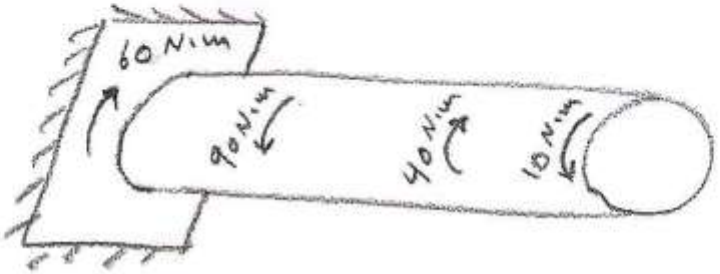
$$J = \frac{\pi}{2} R^4$$

$$J = \frac{\pi}{2}(R_1^4 - R_2^4)$$

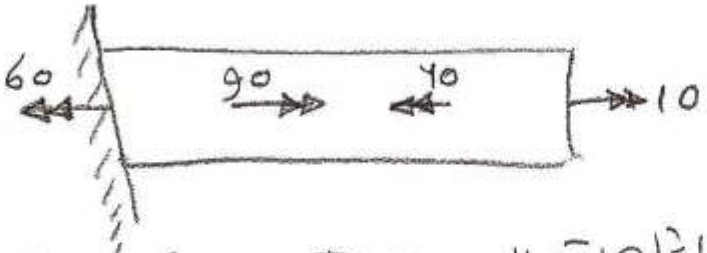
(6) Torsion

How to Draw Torque Diagram ?

Example : Draw Torque Diagram For This Rod



اولاً : نرسم منظر جانبي للشكل كما يلي



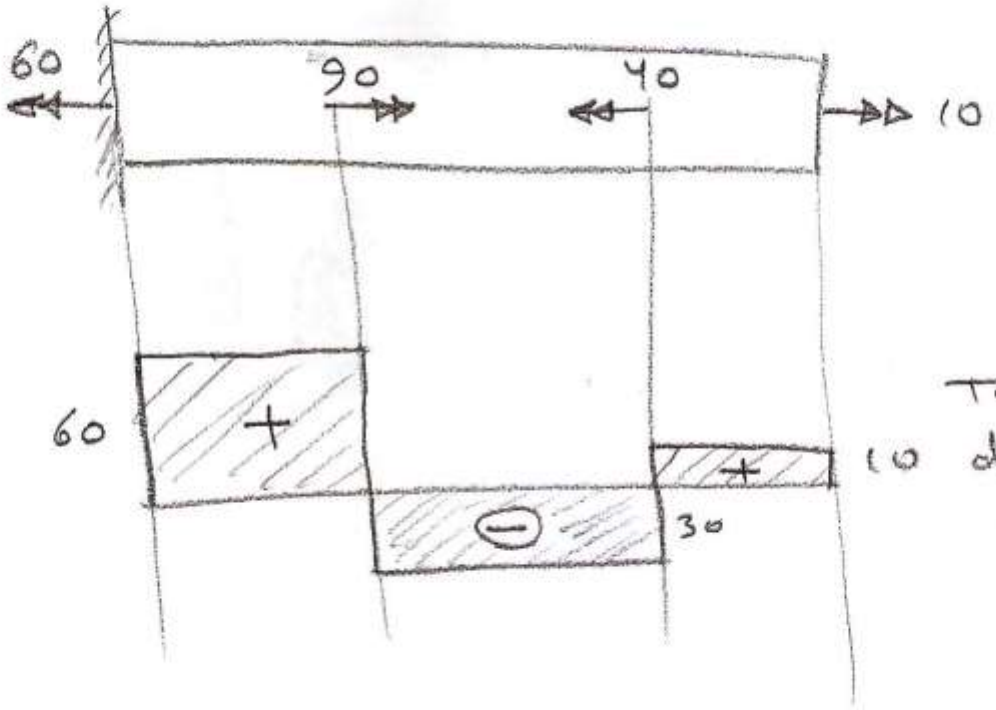
ثانياً : نحدد اتجاهات الـ Torque حسب قاعدة اليد اليمنى فاذا كانت الاصابع الاربعة باتجاه الدوران فان الابهام باتجاه السهم ويوضع سهم مزدوج للدلالة على الـ Torque ولكي نميزه عن الـ Axial Force

1- اتجاه الـ Torque الذي مقداره 60 N.m مثل اتجاه اصابع اليد اليمنى لذلك فان الابهام يكون الى اتجاه السهم ، ولذلك الـ Torque الذي مقداره 40 N.m .

2- اتجاه الـ Torque الذي مقداره 90 N.m ، 10 N.m عكس اتجاه دوران الاصابع الاربعة اليد اليمنى لذلك فان اتجاه السهم المزدوج الى اليمين

(7) Torsion

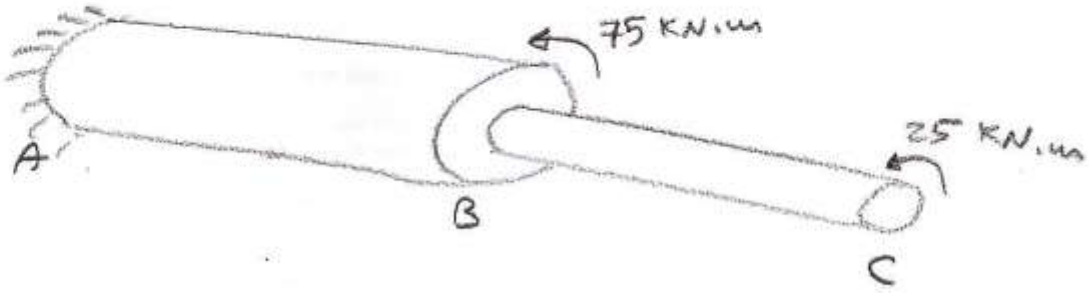
بالنسبة لنفس اسلوب الـ Axial force والـ tension موجب والـ Compression سالب ونرسم الـ diagram



Torque diagram

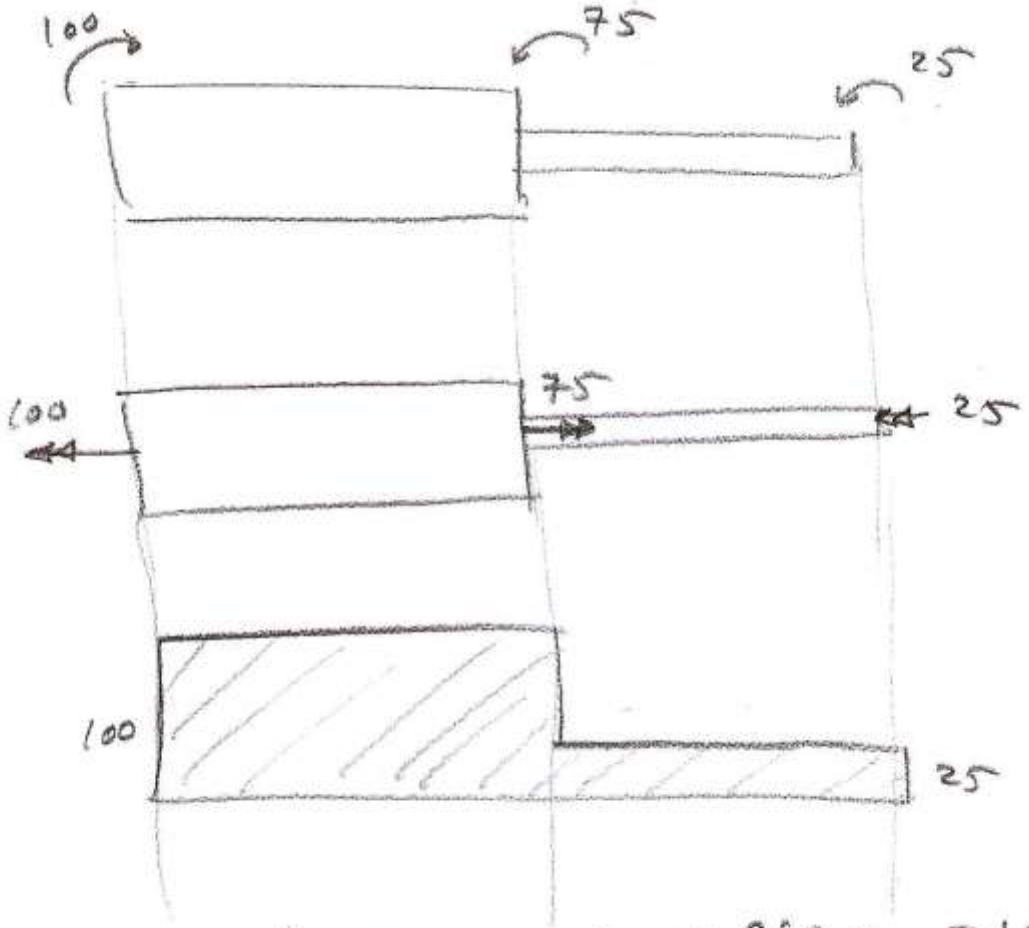
(8) Torsion

Example Draw Torque diagram (T.D)



Solution :-

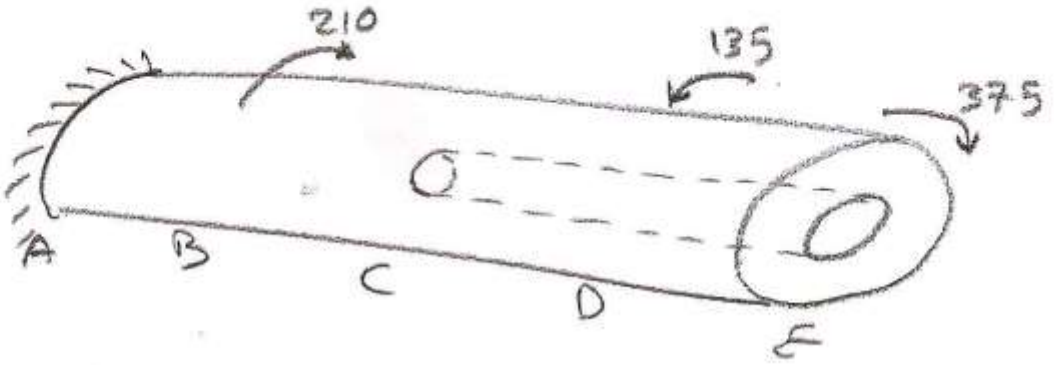
Torque at A = 75 + 25 = 100 KN.m

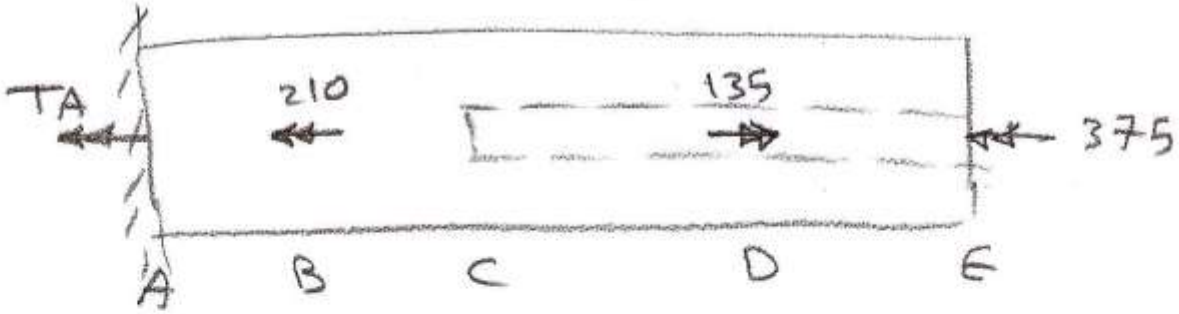


ملاحظة :- لا تؤثر الـ Torque بإختلاف حجم المقطع ولا تتأثر بإختلاف مادة المقطع فقط الذي يؤثر عليه اتجاه وموقع الـ Torque

(9) Torsion

Example: Draw T.D





1- Find Torque at A :-

$+\circlearrowright \sum T = 0$

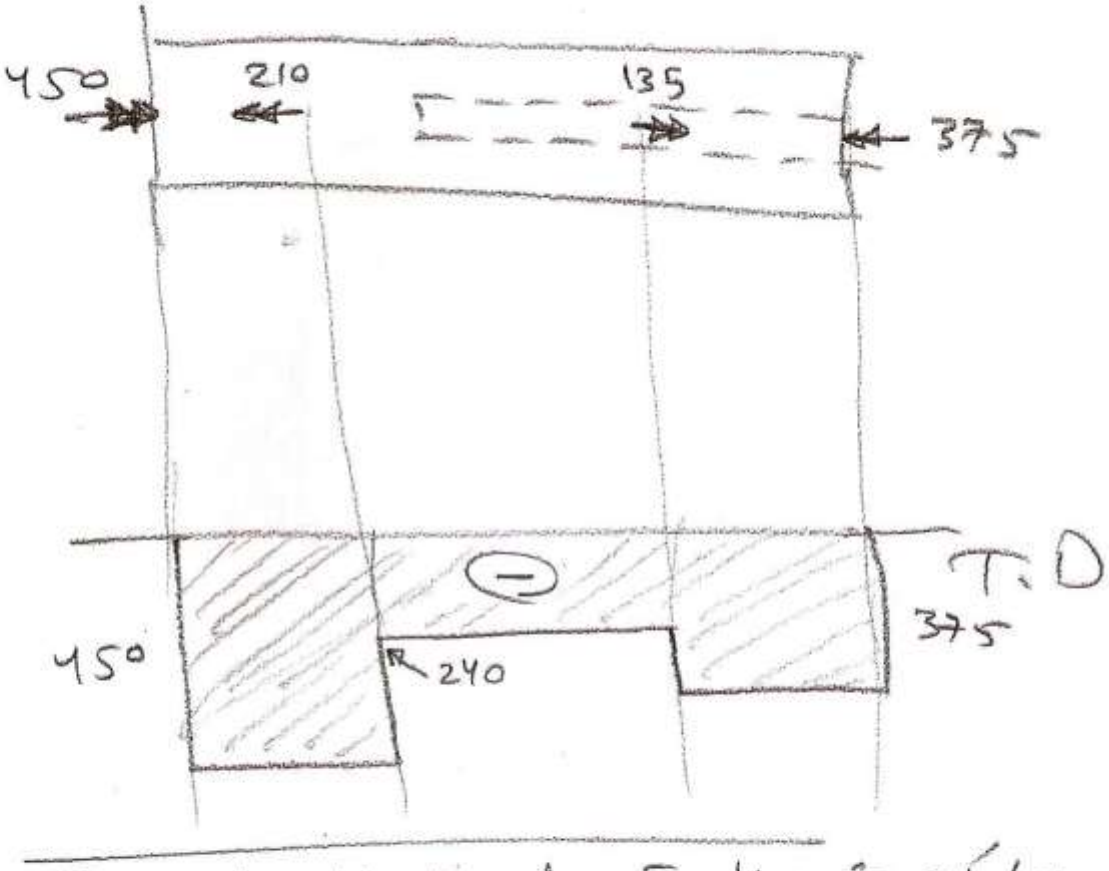
$135 - 210 - 375 - TA = 0$

$TA = -450$ KN.m

الاشارة السالبة تعني ان الفرضية خاطئة وان اتجاه الـ Torque بالعكس

$TA = 450 \circlearrowright$

(10) Torsion



س/ كيف تحويل زاوية 30 degree الى rad ؟

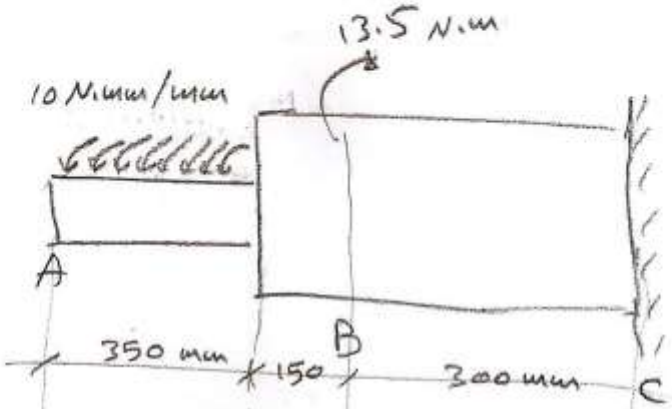
$$\theta \text{ in rad} = 30 * \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6} = 0.5235$$

س/ كيف تحويل زاوية 0.5235 rad الى زاوية degree ؟

$$\theta \text{ in degree} = 0.5235 * \frac{180}{\pi} = 30$$

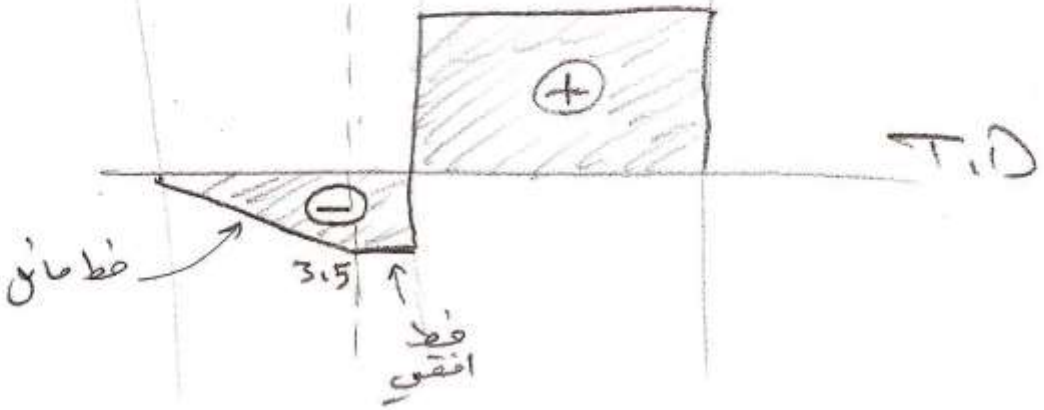
(11) Torsion

Example Draw T.D



Solution: Find Torque @ C

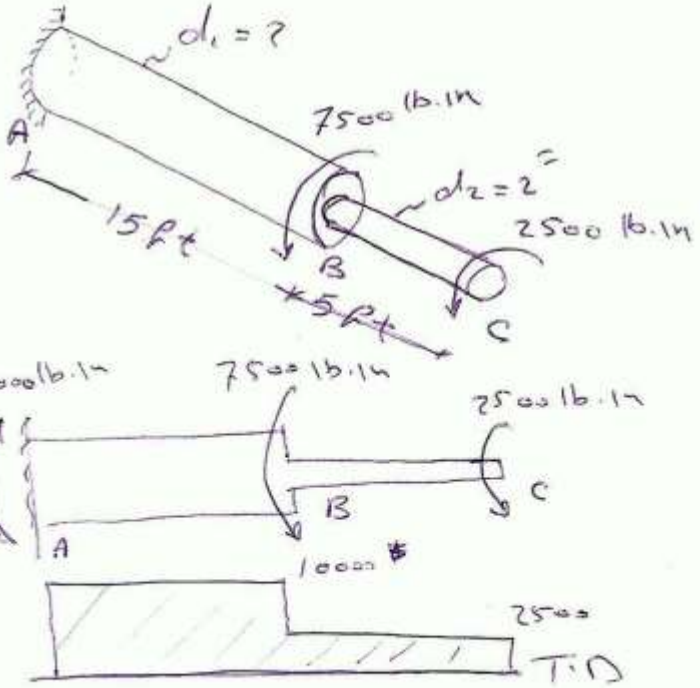
$$\frac{10\ N.mm}{mm} * 350\ mm = 3500\ N.mm = \frac{3500}{1000} = 3.5\ N.m$$



(9)

5-10 ropov A stepped steel shaft ($E = 29 * 10^6$ psi) $G = 12 * 10^6$ psi as shown in Fig. Find the minimum permissible diameter (d_1) for the shaft from A to B if the allowable shearing stress is 6000 psi and the total twist between A and C is limited to 3°.

Solution



$\tau_{allowable} = 6000$ psi

$\phi_{total} = 3° * \frac{\pi}{180} = 0.05233$ rad

$\tau_{allowable} = \frac{(T_1 + T_2) R}{J}$

$6000 \frac{lb}{in^2} = \frac{10000 \text{ lb.in } (R) \text{ in}}{(\frac{\pi}{2} R^4) in^4}$

$R = 1.02 \Rightarrow Dia = 2.04$

$\phi_{total} = \phi_{C \to B} + \phi_{B \to A} + \phi_A$

$= \frac{2500 * 5 * 12}{\frac{\pi}{2}(2)^4 * 12 * 10^6} + \frac{7500 * 15 * 12}{\frac{\pi}{2}(R)^4 * 12 * 10^6}$

$0.05233 = 4.976 * 10^{-4} + \frac{1350000}{18840000 R^4}$

$R^4 = 1.3824$

$R = 1.084$

$d_1 = 2.168$

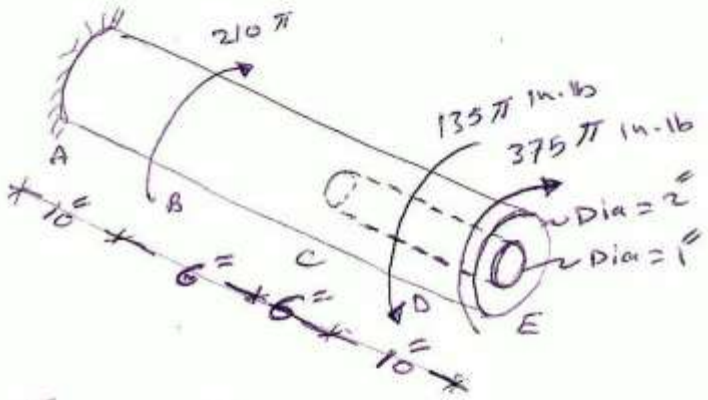
$\therefore d_1 \simeq 2.2"$

5-4 POPOV (B)

a) Determine the maximume shearing stress in the shaft subject to the Torques shown in Fig. below.

b) Find the angle of twist in degrees between the two ends. let $G = 12 * 10^6$ psi

Solution



a) $\tau_{max} = ?$

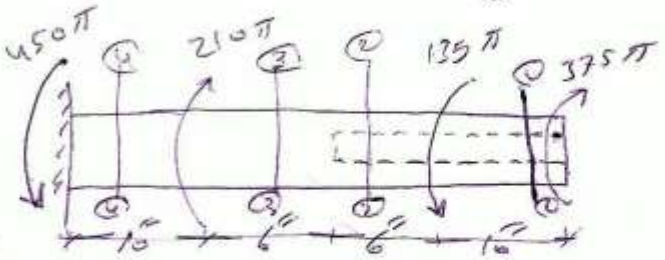
$$\tau_{max} = \frac{TR}{J}$$

$$J_{hollow} = \frac{\pi}{2}(R_1^4 - R_2^4)$$

$$= \frac{\pi}{2}(1^4 - 0.5^4)$$

$$= 1.47187 \text{ in}^4$$

$$J_{solid} = \frac{\pi}{2}(1)^4 = 1.57 \text{ in}^4$$

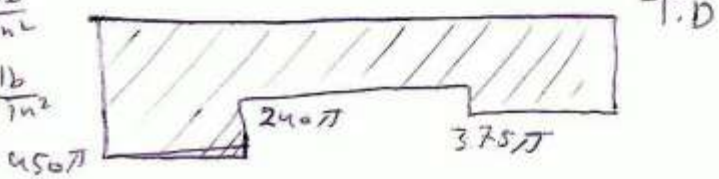


$$\tau_{1-1} = \frac{375\pi(1)}{1.47187} = 254.78\pi \frac{lb}{in^2}$$

$$\tau_{2-2} = \frac{240\pi(1)}{1.47187} = 163.05\pi \frac{lb}{in^2}$$

$$\tau_{3-3} = \frac{240\pi(1)}{1.57} = 152.86\pi \frac{lb}{in^2}$$

$$\tau_{4-4} = \frac{450\pi(1)}{1.57} = 286.62\pi \frac{lb}{in^2}$$



b) $\phi_{total} = ?$

$$\phi_{total} = \phi_E = \phi_{E-D} + \phi_{D-C} + \phi_{C-B} + \phi_{B-A} + \phi_A$$

$$= \frac{375\pi(10)}{12*10^6 * 1.47187} + \frac{240\pi(6)}{12*10^6 * 1.47187} + \frac{240\pi(6)}{12*10^6 * 1.57} + \frac{450\pi(10)}{12*10^6 * 1.57}$$

$$= 2.123 * 10^{-4}(\pi) + 8.153\pi * 10^{-5} + 7.64\pi * 10^{-5} + 2.388\pi * 10^{-4}$$

$$= 6.09\pi * 10^{-4} \text{ rad} * \frac{180^\circ}{\pi} = 0.1096^\circ$$

Q3: A steel shaft (E= 200 GPa, G=80 GPa) as shown in the Fig.3. if d2 = 10 cm find the minimum permissible diameter d1 for the shaft from A to B if the total twist is 2º.

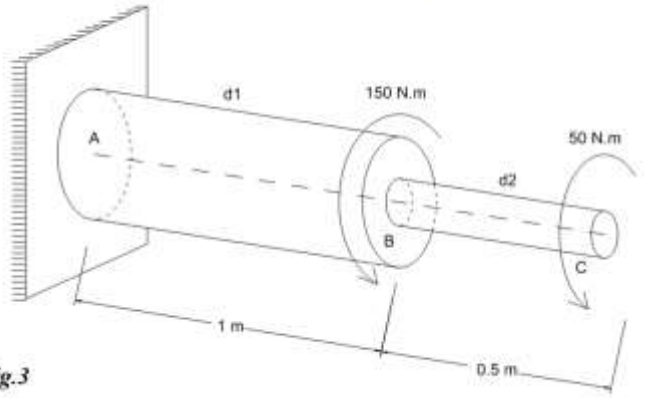
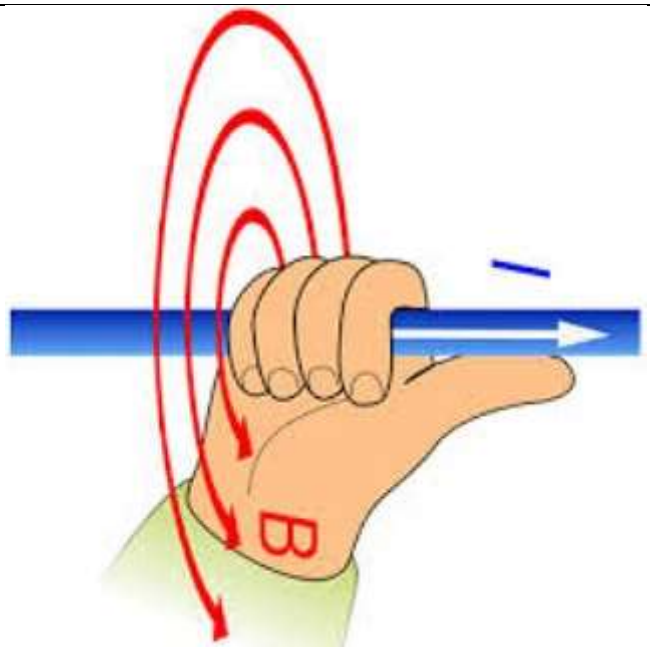
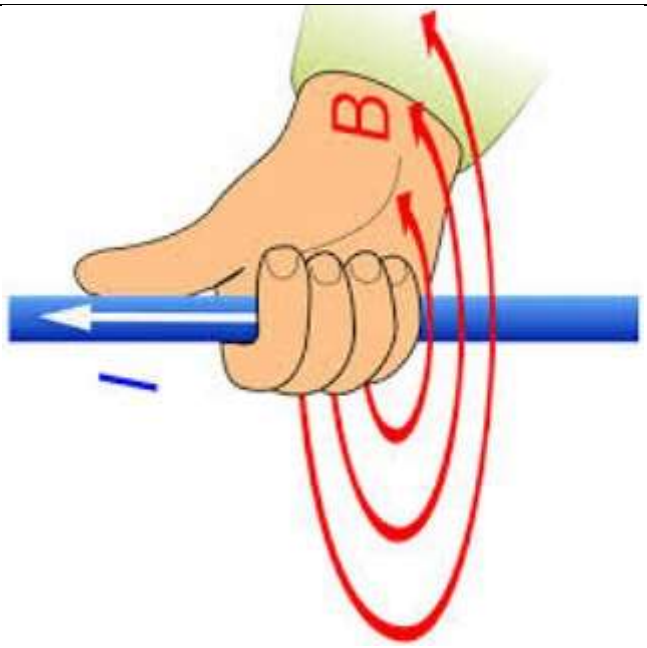


Fig.3

33%




B

Problem 318

A solid aluminum shaft 2 in. in diameter is subjected to two torques as shown in Fig. P-318. Determine the maximum shearing stress in each segment and the angle of rotation of the free end. Use $G = 4 \times 10^6$ psi.

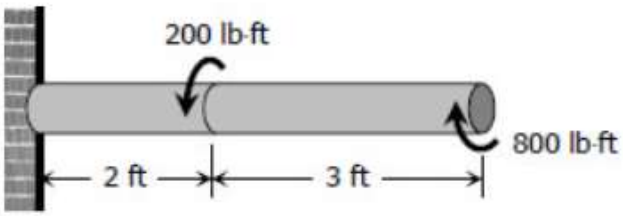
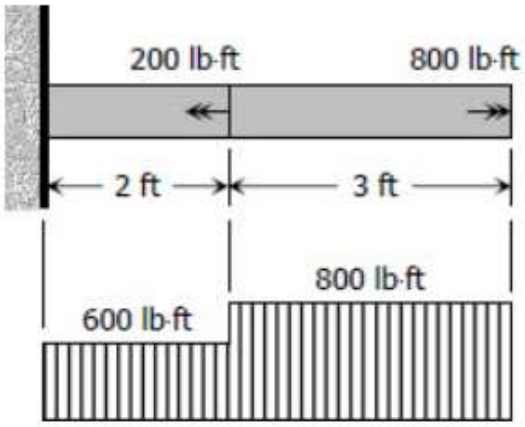


Figure P-318



$$\tau = \frac{TR}{J} \qquad J = \frac{\pi}{2} R^4 \quad \text{for circular section}$$

نحول من قوت الى انچ

$$\tau_{2ft} = \frac{[600\ lb.ft + (12)] * 1}{\frac{\pi}{2}(1)^4} \leftarrow \text{نصف قطر}$$

$$= 4583.66\ Psi$$

$$\tau_{ft} = \frac{[800 * 12] * 1}{\frac{\pi}{2}(1)^4} = 6111.55\ Psi$$

$$\theta = \frac{TL}{JG}$$

$$\theta_{2ft} = \frac{[600 * 12] * [2ft * 12]}{[\frac{\pi}{2}(1)^4] * [4 * 10^6 Psi]} = 0.0275\ rad$$

$$\theta_{3ft} = \frac{[800 * 12] * [3 * 12]}{[\frac{\pi}{2} * (1)^4] * [4 * 10^6 Psi]} = 0.055$$

$$\theta_{Total} = 0.0275 + 0.055$$
$$= 0.0825\ rad$$

Conver rad To degree

$$0.0825\ rad * \frac{180}{\pi} = 4.727^\circ\ degree$$