4 GEOMETRIC FORMULAS

RECTANGLE OF LENGTH b AND WIDTH a

4.1 Area $= ab$

4.2 Perimeter $= 2a + 2b$

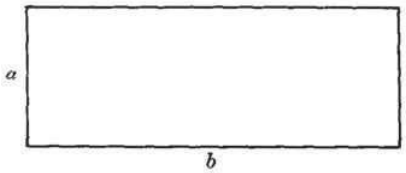


Fig. 4-1

PARALLELOGRAM OF ALTITUDE h AND BASE b

4.3 Area $= bh = ab \sin\theta$

4.4 Perimeter $= 2a + 2b$

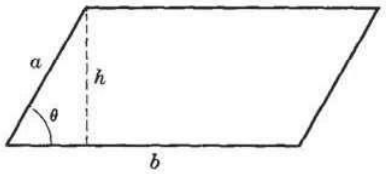


Fig. 4-2

TRIANGLE OF ALTITUDE h AND BASE b

4.5 Area $= \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab \sin\theta$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

where $s = \frac{1}{2}(a+b+c) =$ semiperimeter

4.6 Perimeter $= a + b + c$

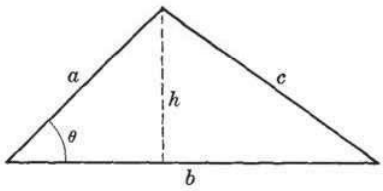


Fig. 4-3

TRAPEZOID OF ALTITUDE h AND PARALLEL SIDES a AND b

4.7 Area $= \frac{1}{2}h(a+b)$

4.8 Perimeter $= a + b + h\left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\phi}\right)$

$= a + b + h(\csc\theta + \csc\phi)$

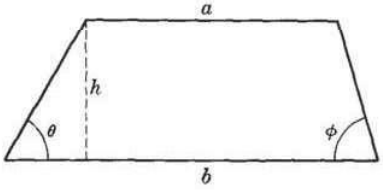


Fig. 4-4

REGULAR POLYGON OF n SIDES EACH OF LENGTH b

4.9 Area $= \frac{1}{4}nb^2 \cot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{4}nb^2 \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}$

4.10 Perimeter $= nb$

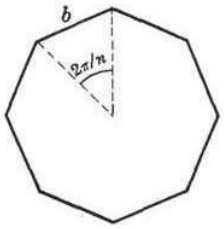


Fig. 4-5

CIRCLE OF RADIUS r

4.11 Area $= \pi r^2$

4.12 Perimeter $= 2\pi r$

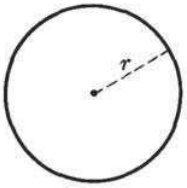


Fig. 4-6

SECTOR OF CIRCLE OF RADIUS r

4.13 Area $= \frac{1}{2}r^2\theta$ [θ in radians]

4.14 Arc length $s = r\theta$

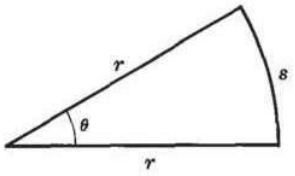


Fig. 4-7

RADIUS OF CIRCLE INSCRIBED IN A TRIANGLE OF SIDES a, b, c

4.15 $$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

where $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ = semiperimeter

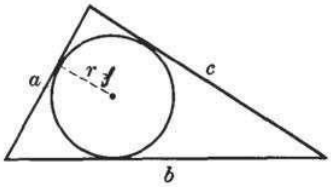


Fig. 4-8

RADIUS OF CIRCLE CIRCUMSCRIBING A TRIANGLE OF SIDES a, b, c

4.16 $$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

where $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ = semiperimeter

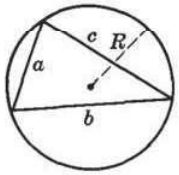


Fig. 4-9

REGULAR POLYGON OF n SIDES INSCRIBED IN CIRCLE OF RADIUS r

4.17 Area $= \frac{1}{2}nr^2 \sin\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}nr^2 \sin\frac{360°}{n}$

4.18 Perimeter $= 2nr \sin\frac{\pi}{n} = 2nr \sin\frac{180°}{n}$

Fig. 4-10

REGULAR POLYGON OF n SIDES CIRCUMSCRIBING A CIRCLE OF RADIUS r

4.19 Area $= nr^2 \tan\frac{\pi}{n} = nr^2 \tan\frac{180°}{n}$

4.20 Perimeter $= 2nr \tan\frac{\pi}{n} = 2nr \tan\frac{180°}{n}$

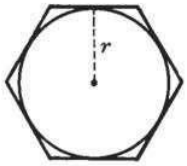


Fig. 4-11

SEGMENT OF CIRCLE OF RADIUS r

4.21 Area of shaded part $= \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$

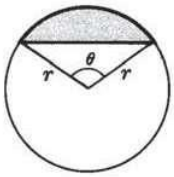


Fig. 4-12

ELLIPSE OF SEMI-MAJOR AXIS a AND SEMI-MINOR AXIS b

4.22 Area $= \pi ab$

4.23 Perimeter $= 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}\, d\theta$

$= 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$ [approximately]

where $k = \sqrt{a^2 - b^2}/a$. See page 254 for numerical tables.

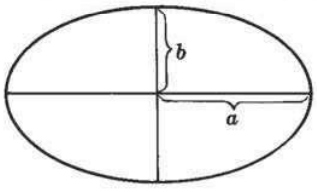


Fig. 4-13

SEGMENT OF A PARABOLA

4.24 Area $= \frac{2}{3}ab$

4.25 Arc length $ABC = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 16a^2} + \frac{b^2}{8a}\ln\left(\frac{4a + \sqrt{b^2 + 16a^2}}{b}\right)$

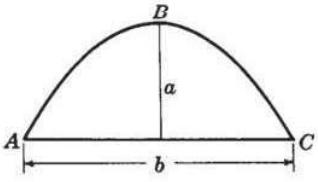


Fig. 4-14

RECTANGULAR PARALLELEPIPED OF LENGTH a, HEIGHT l, WIDTH c

4.26 Volume $= abc$

4.27 Surface area $= 2(ab + ac + bc)$

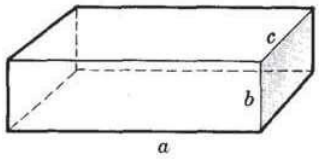


Fig. 4-15

PARALLELEPIPED OF CROSS-SECTIONAL AREA A AND HEIGHT h

4.28 Volume $= Ah = abc \sin\theta$

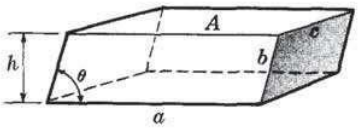


Fig. 4-16

SPHERE OF RADIUS r

4.29 Volume $= \frac{4}{3}\pi r^3$

4.30 Surface area $= 4\pi r^2$

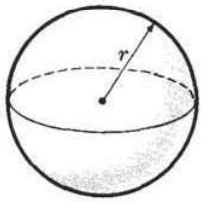


Fig. 4-17

RIGHT CIRCULAR CYLINDER OF RADIUS r AND HEIGHT h

4.31 Volume $= \pi r^2 h$

4.32 Lateral surface area $= 2\pi rh$

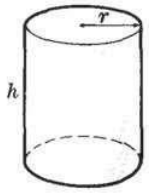


Fig. 4-18

CIRCULAR CYLINDER OF RADIUS r AND SLANT HEIGHT l

4.33 Volume $= \pi r^2 h = \pi r^2 l \sin\theta$

4.34 Lateral surface area $= 2\pi rl = \frac{2\pi rh}{\sin\theta} = 2\pi rh \csc\theta$

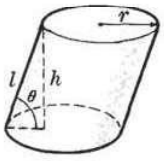


Fig. 4-19

CYLINDER OF CROSS-SECTIONAL AREA A AND SLANT HEIGHT l

4.35 Volume $= Ah = Al \sin\theta$

4.36 Lateral surface area $= pl = \dfrac{ph}{\sin\theta} = ph \csc\theta$

Note that formulas 4.31 to 4.34 are special cases.

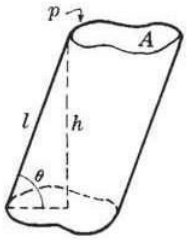


Fig. 4-20

RIGHT CIRCULAR CONE OF RADIUS r AND HEIGHT h

4.37 Volume $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

4.38 Lateral surface area $= \pi r\sqrt{r^2 + h^2} = \pi r l$

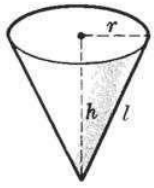


Fig. 4-21

PYRAMID OF BASE AREA A AND HEIGHT h

4.39 Volume $= \frac{1}{3}Ah$

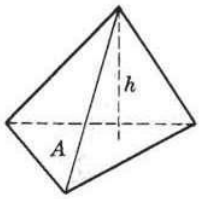


Fig. 4-22

SPHERICAL CAP OF RADIUS r AND HEIGHT h

4.40 Volume (shaded in figure) $= \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$

4.41 Surface area $= 2\pi rh$

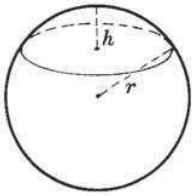


Fig. 4-23

FRUSTRUM OF RIGHT CIRCULAR CONE OF RADII a, b AND HEIGHT h

4.42 Volume $= \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$

4.43 Lateral surface area $= \pi(a + b)\sqrt{h^2 + (b - a)^2}$
$= \pi(a + b)l$

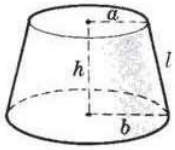


Fig. 4-24

SPHERICAL TRIANGLE OF ANGLES A, B, C ON SPHERE OF RADIUS r

4.44 Area of triangle $ABC = (A + B + C - \pi)r^2$

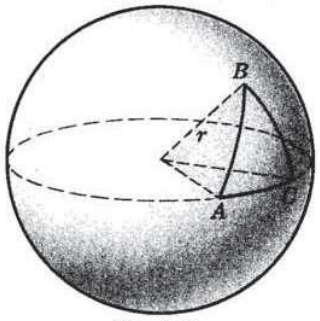


Fig. 4-25

TORUS OF INNER RADIUS a AND OUTER RADIUS b

4.45 Volume $= \frac{1}{4}\pi^2(a + b)(b - a)^2$

4.46 Surface area $= \pi^2(b^2 - a^2)$

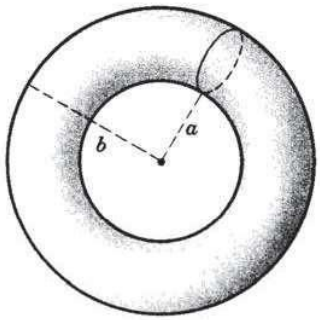


Fig. 4-26

ELLIPSOID OF SEMI-AXES a, b, c

4.47 Volume $= \frac{4}{3}\pi abc$

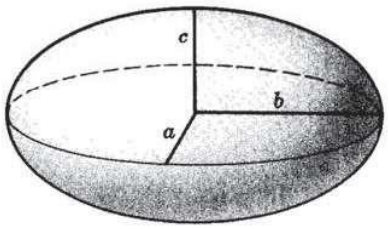


Fig. 4-27

PARABOLOID OF REVOLUTION

4.48 Volume $= \frac{1}{2}\pi b^2 a$

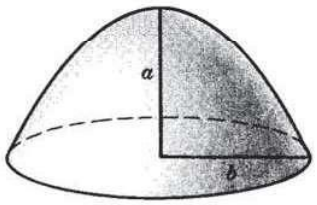


Fig. 4-28

Names and Abbreviations of Some Measurement Units

Unit	Abbreviation	Arabic Abbreviation or Name
Millimetre	mm	ملم
Centimetre	cm	سم
Metre	m	م
Kilometre	km	كم
Foot	ft	(قدم)
Yard	yd	(ياردة)
Gram	gm	غم
Kilogram	kg	كغم
Pound	lb	(باوند أو ليبرة أو رطل)

(m^2 = ^{2}م = sqm)
(m^3 = ^{3}م = cum)

English-Metric Conversion Factors

Conversion Factors from English Units to Metric Units

	Unit	Multiply by	Convert to
Length	inch	25.4 2.54	mm cm
	ft (12 inch)	30.48 0.3048	cm m
	Station (100 ft)	0.3048	Station (100 m)
	yd (3 ft)	0.9144	m
	Mile (1760 yd)	1.6093	km
Area	$inch^2$	645.16	mm^2
	Acre (4840 yd^2)	0.4047 4046.86	Hectare (10000 m^2) m^2
	ft^2 (144 $inch^2$)	0.0929	m^2
	yd^2	0.8361	m^2
	Square Mile	2.59	km^2
	دونم (مشارة) (في العراق)	2500	m^2
	فدان (في مصر)	4200	m^2
Volume	$inch^3$	16.3871	cm^3
	ft^3	0.0283	m^3
	yd^3	0.7646	m^3
	British (Imperial) Gallon	4.5461	Litre (1000 cm^3)
	U.S. Gallon	3.7854	Litre (1000 cm^3)
Mass	lb	0.4536	kg (1000 gm)
	British Ton (2000 lb)	1.0161	Tonne (1000 kg)
	U.S. Ton (2240 lb)	0.9072	Tonne (1000 kg)
Density	lb/yd	0.4961	kg/m
	lb/ft^3	16.0185	kg/m^3

Conversion Factors from Metric Units to English Units

	Unit	Multiply by	Convert to
Length	mm	0.0394	inch
	cm	0.3937 0.0328	inch ft
	m	3.2808 1.0936	ft yd
	Station (100 m)	3.2808	Station (100 ft)
	km	0.6214	Mile (1760 yd)
Area	mm^2	0.0016	$inch^2$
	Hectare (10000 m^2)	2.4711	Acre (4840 yd^2)
	m^2	10.7639 1.1960	ft^2 (144 $inch^2$) yd^2
	km^2	0.3861	Square Mile
Volume	cm^3	0.061	$inch^3$
	m^3	35.3147 1.3080	ft^3 yd^3
	m^3 (1000 Litre)	220 264.2	British (Imperial) Gallon U.S. Gallon
Mass	kg (1000 gm)	2.2046	lb
	Tonne (1000 kg)	0.9842 1.1023	British Ton (2000 lb) U.S. Ton (2240 lb)
Density	kg/m	2.0159	lb/yd
	kg/m^3	0.0624	lb/ft^3

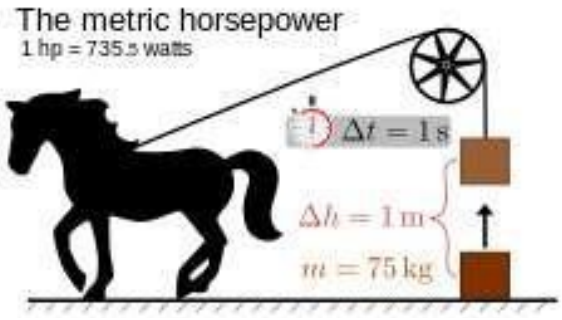
الاحجام الشائعة للبراميل الحديدية:

1) برميل النفط القياسي سعة (160) لتر او ما يعادل (42) غالون امريكي.
2) برميل سعة (200) لتر أو ما يعادل (44) غالون بريطاني.

Horse Power

1 Imperial (Mechanical) Horse Power (hp) = 745.7 Watts

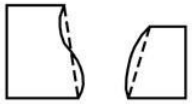
1 Metric Horse Power = 735.5 Watts



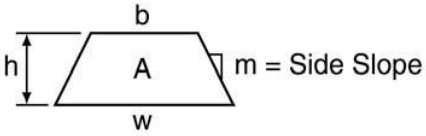
مراجعة لبعض طرائق حساب المساحات والحجوم:

قاعدة شبه المنحرف Trapezoidal Rule:

عندما يكون الشكل يشبه شبه المنحرف ولكن احد جوانبه خط منحني فيمكن تقريب الجزء المنحني الى خط مستقيم وتحويله الى شبه منحرف مثل الشكل الآتي:



وهناك طريقة ادق وهي التي تعتبر ان الخط المقوس هو منحني من الدرجة الثانية Parabola وهي الطريقة المسماة Simpson's Rule وهي خارج نطاق مفردات منهجنا الحالي (راجع منهج المساحة الهندسية).



مساحة شبه المنحرف = معدل مساحة القاعدتين * الارتفاع

$$A = \frac{w + b}{2} \times h$$

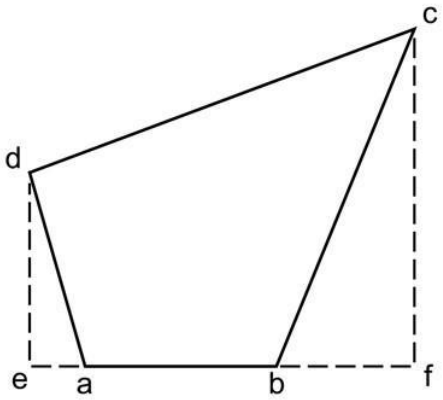
وفي بعض الاحيان تكون القاعدة (w) مجهولة فتحسب المساحة بدلالة الميل الجانبي (m):

$$A = h \times (b + mh)$$

حساب مساحة اي مضلع عن طريق تجزئته الى مستطيلات ومثلثات واشباه منحرفات:

يمكن تجزئة بعض المضلعات الى اشكال مركبة مع بعضها يمكن حساب مساحتها بالمعادلات المعروفة.

مثال ذلك الشكل الآتي، المطلوب فيه حساب المساحة $(abcd)$:



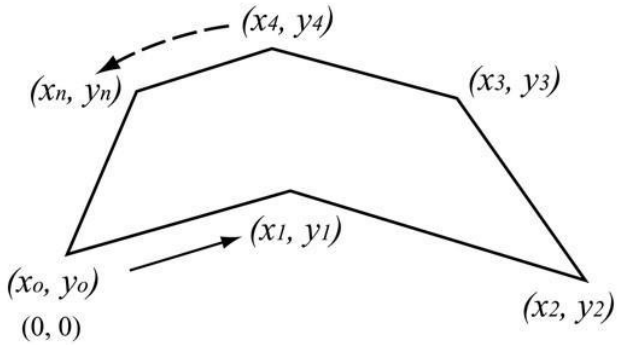
$$A_{abcd} = A_{efcd} - A_{ead} - A_{bfc}$$

$$A_{abcd} = \frac{ed + cf}{2} \times ef - \frac{1}{2} ea \times ed - \frac{1}{2} bf \times fc$$

حساب مساحة اي مضلع بطريقة احداثيات المضلع Coordinates of Traverse:

وهي طريقة عامة لحساب مساحة اي مضلع من خلال تحديد احداثيات رؤوس المضلع المغلق، ويمكن اعتبار اي نقطة من رؤوس المضلع هي نقطة الاصل ثم تقاس احداثيات باقي النقاط بالتتابع نسبة الى تلك النقطة مع اعتبار الاشارات، فالاحداثي الافقي (السيني) يمين نقطة الاصل تكون اشارته موجبة والذي يقع يسارها تكون اشارته سالبة، وهكذا الحال في الاحداثيات العمودية (فوق نقطة الاصل موجب وتحتها سالب).

يتم ترتيب احداثيات كل نقطة بصورة بسط ومقام ($\frac{y}{x}$) بدءاً من نقطة الاصل والسير بالتتابع في مسار مغلق حتى العودة الى نقطة الاصل (مع تكرار نقطة الاصل في نهاية السلسلة). نضرب القيم باتجاه القطر الرئيسي ونجمعها حتى الوصول الى نهاية السلسلة ثم نطرح رجوعاً حاصل الضرب باتجاه القطر الثانوي حتى الوصول الى بداية السلسلة.



$$\frac{y_o}{x_o}\overset{+}{\times}\frac{y_1}{x_1}\times\frac{y_2}{x_2}\times\frac{y_3}{x_3}\times\cdots\cdots\times\frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}\times\frac{y_n}{x_n}\overset{-}{\times}\frac{y_o}{x_o}$$

$$2A = [y_o x_1 + y_1 x_2 + y_2 x_3 + \cdots + y_{n-1} x_n + y_n x_o] - [y_o x_n + y_n x_{n-1} + \cdots + y_3 x_2 + y_2 x_1 + y_1 x_o]$$

واذا كان ناتج $(2A)$ سالباً فتؤخذ قيمته المطلقة:

$$A = \left|\frac{(2A)}{2}\right|$$

ملاحظة:

في بعض الحالات قد تتوفر نقطة وميل فيمكن استخراج معادلة الخط المستقيم من نقطة وميل واستخدام تقاطع المستقيمات لاستخراج احداثيات نقاط التلاقي.

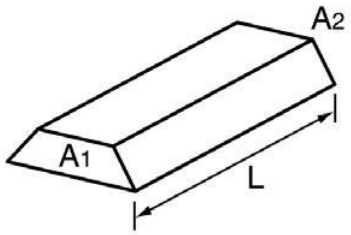
ويمكن عادة الحصول على الاحداثيات من خلال الرسم على ورق بياني او باستخدام جهاز Planometer.

حساب الحجوم باستخدام الطرق التقريبية للاشكال المنشورية:

تعريف المنشور (Prism): هو جسم هندسي يتألف من وجهين مضلعين متوازيين وتصل بين رؤوس المضلعين خطوط مستقيمة، ولا يلزم ان يكون المضلعان متماثلين في الشكل او المساحة.

1) طريقة معدل المساحات:

تستخدم هذه الطريقة عندما يكون المضلعان في طرفي الشكل ذوي اشكال متماثلة (مستطيلان او شبها منحرف او مثلثان).

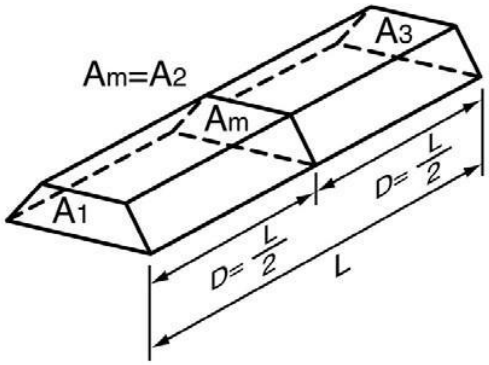


الحجم = معدل مساحتي الطرفين × طول الشكل

$$V = \frac{A_1 + A_2}{2} \times L$$

2) الطريقة (الصيغة) المنشورية Prismoidal Formula:

هذه الطريقة ادق من طريقة معدل المساحة وتعطي نتائج ادق عندما يكون المضلعان في طرفي المنشور غير متماثلين. في هذه الطريقة تستخدم المساحة في وسط المنشور بدلاً من معدل المساحة ولذلك تتطلب وجود ثلاث مساحات بدلاً من مساحتين (مساحتان طرفيتان ومساحة في الوسط) تفصل بينها مسافات متساوية.



$$V = \frac{L}{6} \times (A_1 + 4A_m + A_3)$$

حيث ان A_m هي المساحة في وسط المنشور والتي قد لا تساوي معدل مساحتي الطرفين.