ويكيبيديا

ميكانيك لاغرانج

تحتاج هذه المقالة أو المقطع إلى مصادر ومراجع إضافية لتحسين وثوقيتها. قد ترد فيها أفكار ومعلومات من مصادر معتمدة دون ذكرها. رجاء، ساعد في تطوير هذه المقالة بإدراج المصادر المناسبة. (ديسمبر 2017)

محتويات

ميكانيكا لاجرانج Lagrangian mechanics عبارة عن إعادة صياغة للميكانيكا الكلاسيكية قدمه جوزيف لويس لاجرانج عام 1788، في ميكانيكا لاجرانج، مسار الجسم يشتق بإيجاد المسار الذي يقلل الفعل action، وهو مقدار يعتبر تكامل لكمية ندعوها لاجرانجي Lagrangian على الزمن، اللاجرانجي بالنسبة للميكانيكا الكلاسيكية يعتبر الفرق بين الطاقة الحركية والطاقة الكامنة.[1]

ميكانيكا لاجرانج Lagrangian mechanics عبارة عن إعادة صياغة للميكانيكا الكلاسيكية قدمه جوزيف لويس لاجرانج عام 1788، في ميكانيكا لاجرانج، مسار الجسم يشتق بإيجاد المسار الذي يقلل الفعل action، وهو مقدار يعتبر تكامل لكمية ندعوها لاجرانجي Lagrangian على الزمن، اللاجرانجي بالنسبة للميكانيكا الكلاسيكية يعتبر الفرق بين الطاقة الحركية والطاقة الكامنة.[1]

مواضيع في الميكانيكا الكلاسيكية

ميكانيكا كلاسيكية

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})$$

قانون نيوتن الثاني

السكون | الحركة | التحريك |هاملتون | لاغرانج

مصطلحات رياضية

جسيم نقطي | نظام إحداثي | متجه | جسم جاسيء

علم السكون

توازن ميكانيكي | قيد ميكانيكي | مبرهنة لامي | إجهاد القص | انفعال | إجهاد

علم الحركة

حركة انتقالية | حركة دورانية | سرعة | تسارع | سرعة خطية | سرعة زاوية | تسارع خطي | تسارع زاوي

علم التحريك

قوانين نيوتن الثلاثة للحركة | طاقة حركية | طاقة كامنة | قوة | متجه | زخم أو كمية الحركة | دفع القوة | عزم | عطالة | عزم العطالة | عزم زاوي | تصادم | سقوط حر | ثقالة | قذف

قوانين الحفظ

بقاء الكتلة | بقاء القيمة | بقاء الطاقة | تكافؤ المادة والطاقة | مبرهنة نويثر | معادلة الاستمرار | لاتباين أو صمود

هذا الموضوع يبسط بصورة كبيرة الكثير من المسائل الفيزيائية، مثلاً كرة صغيرة في حلقة فإذا قمنا بحساب تلك المسألة على أساس الميكانيكيا النيوتنية، سنحصل على مجموعة معقدة من المعادلات التي ستأخذ بعين الإعتبار القوى التي تؤثر بها الدوامة على الكرية في كل لحظة.

نفس هذه المسألة تصبح أسهل بإستخدام ميكانيكا لاجرانج، حيث سينظر إلى جميع الحركات الممكنة التي تقوم بها الكرية على الدوامة ونجد رياضياً الحركة التي تقلل الفعل إلى أدنى حد، بالتالي يكون لدينا عدد أقل من المعادلات لأنها لا تمثل حساباً مباشراً لتأثير الدوامة على الكرية عند كل لحظة.

معادلات لاغرانج

لنعتبر جسيما مفردا ذو كتلة m وشعاع موضع **r**. تطبق عليه قوة **F**، يمكن عندئذ أن نعبر عن هذا النظام بجسيم يتحرك في بئر جهدي فتكون له طاقة حركة و أيضا طاقة وضع . نفترض أن الجهد المؤثر على الجسيم $V(\mathbf{r}, t)$ دالة تعتمد على الزمن t و المكان **r** (مثل جهد نواة الذرة التي تؤثر على إلكترون يدور حولها) :

$$\mathbf{F} = -\nabla V.$$

مثل هذه القوة تكون مستقلة عن المشتق الثالث أو المشتقات الأعلى رتبة لشعاع الموضع **r**، لذا فإن قانون نيوتن الثاني يشكل مجموعة من ثلاث معادلات تفاضلية نظامية من الرتبة الثانية.

وبناء على ذلك يمكن وصف حركة هذا الجسيم بدلالة متغيرات مستقلة أو ما يدعى " درجات حرية ". درجات الحرية هذه هي مجموعة من ستة متغيرات :

$\{r_j, r'_j \mid j = 1, 2, 3\}$،

المركبات الديكارتية لمتجه الموضع **r** ومشتقاته الزمنية (مشتقاته بالنسبة للزمن), في لحظة زمنية معينة أي أن الموضع (x,y,z) والسرعة بمكوناتها الديكارتية الثلاثة :

(v_x,v_y,v_z).

بشكل أعم، يمكننا العمل ضمن جملة إحداثيات معممة ، q_j, مع مشتقاتها الزمنية، أو ما يدعى بالسرعات المعممة، q'_j.

يرتبط متجه الموضع **r** مع **الإحداثيات المعممة** عن طريق جملة **معادلات تحويل**

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_i, q_j, q_k, t).$$

فمثلاً عند التعامل مع بندول (نواس) بسيط ذو طول l، يكون الخيار المنطقي للإحداثيات المعممة هو زاوية البندول التي يصنعها مع خطه الشاقولي (العمودي)، θ,

وتكون معادلات التحويل :

$$\mathbf{r}(\theta, \theta', t) = (l\sin\theta, l\cos\theta).$$

مصطلح *إحداثيات معممة* أحد بقايا فترة استخدام الإحداثيات الديكارتية كنظام إحداثيات افتراضي.

لنعتبر الإزاحة الاعتبارية للجسم δ**r** فيكون الشغل المبذول من قبل القوة **F** هو :

$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r}$.

باستخدام قانون نيوتن الثاني يمكننا أن نكتب :

$$\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} \quad = \quad m\mathbf{r}'' \cdot \delta\mathbf{r}.$$

بما أن الشغل كمية فيزيائية قياسية (كمية وليست متجهه) يمكننا إعادة كتابة هذه المعادلات بدلالة الإحداثيات المعممة والسرعات على الجانب الأيسر.

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} \quad &= \quad -\nabla V \cdot \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\delta q_i \\ &= \quad -\sum_{i,j} \frac{\partial V}{\partial r_j}\frac{\partial r_j}{\partial q_i}\delta q_i \\ &= \quad -\sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i.\end{aligned}$$

عملية تنسيق الجانب الأيمن أكثر صعوبة لكن بعد الترتيب والتبديل :

$$m\mathbf{r}''\cdot\delta\mathbf{r}=\sum_i\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right]\delta q_i$$

حيث هي الطاقة الحركية للجسيم $T = 1/2\, m\, r'^{\,2}$. ومعادلة الشغل المبذول ستصبح بالشكل :

$$\sum_i\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}-\frac{\partial(T-V)}{\partial q_i}\right]\delta q_i=0.$$

على أي حال، فإن هذا يجب أن يكون صحيحاً بالنسبة لأي مجموعة من الإزاحات المعممة δq_i, لذا يكون لدينا :

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}-\frac{\partial(T-V)}{\partial q_i}\right]=0$$

من أجل أي من الإحداثيات المعممة δq_i.

يمكننا أن نبسط هذه المعادلة بملاحظة V أن هو تابع ل **r** و t, ومتجه الموضع **r** تابع أيضاً للإحداثيات المعممة والزمن t لذا فإن الطاقة الكامنة V تكون مستقلة عن السرعات المعممة

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial q_i'}=0.$$

بإدخال هذا في المعادلة السابقة واستبدال $L = T - V$ نحصل على معادلات لاجرانج :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i'}.$$

هناك دوماً معادلة لاجرانج وحيدة لكل إحداثي معمم q_i. وعندما يكون $q_i = r_i$ (أي أن الإحداثيات المعممة هي ببساطة إحداثيات ديكارتية), عندئذ نستطيع بسهولة إختزال معادلة لاجرانج إلى قانون نيوتن الثاني.

الإشتقاق أعلاه يمكن تعميمه على نظام (جملة) مؤلفة من N جسيم. عندئذ يكون هناك $6N$ إحداثي معمم يرتبطان بإحداثيات الموضع عن طريق معادلات التحويل الثلاثية $3N$. في معادلات لاجرانج $3N$ يكون دوماً T هو الطاقة الحركية الكلية للجملة، وV الطاقة الكامنة الكلية.

عملياً من الأسهل حل المسألة باستخدام معادلة اويلر-لاغرانج بدلاً من قوانين نيوتن. ذلك لأن الإحداثيات المعممة q_i يمكن اختيارها لتلائم تناظرات النظام.

مراجع

1. ^ R. Penrose (2007). *The Road to Reality*. Vintage books. صفحة 474. ISBN 0-679-77631-1.

انظر أيضا

- معادلة هاميلتون
- ستة درجات حرية