

2-6-3-2 Relation between  $C_p$  and  $C_v$  (Derivation)

$$q_v = C_v \Delta T = \Delta U \text{ (at constant volume)} \quad (2-23)$$

$$q_p = C_p \Delta T = \Delta H \text{ (at constant pressure)} \quad (2-33)$$

من المعادلتين (2-23) و (2-33) أي السعة الحرارية تحت حجم ثابت ( $C_v$ ) أو تحت ضغط ثابت ( $C_p$ ) يمكن الاستنتاج أن قيمة  $C_p > C_v$  والسبب في ذلك يعود إلى أن السعة الحرارية تحت ضغط ثابت يحصل عندها شغل تمدد والذي لا يحصل في حالة السعة الحرارية تحت حجم ثابت، حيث تستخدم جميع الطاقة المنتقلة فقط إلى رفع درجة حرارة الغاز (النظام) من خلال  $\Delta T$  ولذلك عندما لا تتغير درجة حرارة النظام تصبح قيمة  $\Delta U = \text{zero}$ . بالمقابل فإن السعة الحرارية تحت ضغط ثابت يحصل عندها شغل تمدد عند انتقال الطاقة على شكل حرارة بالإضافة إلى خزن الحرارة في النظام، بذلك عند الرجوع إلى المعادلة (2-25) والتعويض عن قيمة  $p\Delta V$  بما يساويها من القانون العام للغازات نحصل على:

$$\Delta H = \Delta U + (p\Delta V = \Delta RT) \quad (2-27)$$

وبما إن قيمة  $R$  ثابتة عليه تصبح خارج رمز التغيير  $\Delta$  وتكون المعادلة بالشكل (2-34)

$$\Delta H = \Delta U + R\Delta T \text{ (Charles's law)} \quad (2-34)$$

وبالتعويض عن  $\Delta U$  بما يعادلها من المعادلة (2-23) و  $\Delta H$  من المعادلة (2-33) نحصل على المعادلة التالية:

$$C_p \Delta T = C_v \Delta T + R\Delta T \quad (2-35)$$

وبعد حذف  $\Delta T$  من كلا الطرفين نحصل على المعادلة (2-36):

$$C_p = C_v + R \quad (2-36)$$

وبعد إعادة ترتيب المعادلة أعلاه نحصل على المعادلة (العلاقة) التالية:

$$C_p - C_v = R, \text{ for one mole of ideal gas} \quad (2-37)$$

$$C_p - C_v = nR, \text{ for no. of moles of ideal gas} \quad (2-37)$$

إن المعادلة (2-37) تثبت أن عملية طرح  $C_v$  من  $C_p$  تساوي  $R$  وتثبت ما ذكر أعلاه وهو أن  $C_v$  أقل من  $C_p$ .

وبما إنَّ  $C_p$  أكبر من  $C_v$  ، فهذا يعني أنَّ عملية خزن الطاقة المنتقلة على شكل حرارة تحت ضغطٍ ثابت أعلى منه تحت حجمٍ ثابت.

المعادلة (2-37) تستخدم للتعبير عن العلاقة بين السعتين الحراريتين للغاز الأحادي الذرة (Mono atomic gas) وكذلك تثبت أنَّ الفرق بينهما يساوي الثابت العام للغازات ( $R$ )، وفقاً لذلك وحسب تعريف الطاقة الداخلية للغاز الأحادي الذرة وبثبوت الحجم فإنَّ:

$$q_v = C_v \Delta T = \Delta U \quad (2-23)$$

OR

$$\Delta U = C_v = \frac{q_v}{n\Delta T} = \frac{3}{2} nR\Delta T \quad (2-38)$$

$$\Delta U = q_v = C_v = \frac{3}{2} R \quad (2-39)$$

أما السعة الحرارية وتحت ضغطٍ ثابت حيث يوجد شغل تمدد فإنَّ المعادلة (2-6) تصبح بالشكل التالي

$$\Delta U = q_p (nC_p\Delta T) - p\Delta V (nR\Delta T) \quad (2-6)$$

$$q_p (nC_p\Delta T) = \Delta U + p\Delta V (nR\Delta T) \text{ Rearranging the equation}$$

من المعادلة (2-38) نعوض عن  $\Delta U$  بما يساويها في المعادلة (2-6) المعادة الترتيب فنحصل على التالي:

$$nC_p\Delta T = \frac{3}{2} nR\Delta T + nR\Delta T \quad (2-40)$$

وبقسمة طرفي المعادلة على  $n\Delta T$  نحصل على التالي:

$$C_p = \frac{3}{2} R + R \quad (2-40)$$

وبالجمع نحصل على المعادلة (2-41):

$$C_p = \frac{5}{2} R \text{ where this is prove that } C_p > C_v \quad (2-41)$$

من المعادلة (2-39) يمكن معرفة قيمة  $C_v$  و من المعادلة (2-41) يمكن معرفة قيمة  $C_p$  من دون ذكرها في السؤال.

$$C_v = \frac{3}{2} R = \frac{3}{2} \times 8.314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} = 12.471 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$C_p = \frac{5}{2} R = \frac{5}{2} \times 8.314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} = 20.785 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$C_p - C_v = R, (20.785 - 12.471) \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

أما النسبة بين  $C_p$  و  $C_v$  فتعطى من خلال المعادلة التالية:

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma = \frac{20.785 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}}{12.471 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}} = 1.67 \quad (2-42)$$

الرمز كما  $\gamma$  هنا يمثل النسبة بين السعتين الحراريتين والتي سيتم توضيح استخدامها في العمليات الأديباتيكية التالية. الجدول (2-2) يوضح السعة الحرارية المولارية عند حجم أو تحت ضغط ثابت للغازات المثالية والحقيقية.

Table 2-2: Illustrate the molar heat capacities of ideal and real gases at constant volume and constant pressure.

Molar heat capacities for various gases ( $\text{J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ )				
Gas	$C_p$	$C_v$	$C_p - C_v$	$\gamma = C_p/C_v$
<b>Monatomic gases</b>				
He	20.8	12.5	8.33	1.67
Ar	20.8	12.5	8.33	1.67
Ne	20.8	12.7	8.12	1.64
Kr	20.8	12.3	8.49	1.69
<b>Diatomic gases</b>				
H <sub>2</sub>	28.8	20.4	8.33	1.41
N <sub>2</sub>	29.1	20.8	8.33	1.40
O <sub>2</sub>	29.4	21.1	8.33	1.40
CO	29.3	21.0	8.33	1.40
Cl <sub>2</sub>	34.7	25.7	8.96	1.35
<b>Polyatomic gases</b>				
CO <sub>2</sub>	37.0	28.5	8.50	1.30
SO <sub>2</sub>	40.4	31.4	9.00	1.29
H <sub>2</sub> O	35.4	27.0	8.37	1.30
CH <sub>4</sub>	35.5	27.1	8.41	1.31

**Example:** Estimate the molar heat capacity of nitrogen.

**Solution:** Because the N<sub>2</sub> gas here is di atomic so:

$$C_v = \frac{5}{2}R = \frac{5}{2} 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 20.785 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

**Homework 1:** Calculate the molar heat capacity of helium gas (**helium is a monatomic gas and it is ideal gas**).