(1)

* المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة:

Hom. Lin. Diff. Eq.

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0$$

حيث $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ثوابت حقيقية

لحل المعادلة نجد الجذور للمعادلة المميزة

(1) اذا كانت مختلفة $m_1, m_2, \ldots, m_n$ فان الحلول $e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \ldots, e^{m_n x}$

Ex: find the solution of the diff. eq.

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow m_1 = 1, m_2 = 2 \Rightarrow e^{2x}, e^{x}$$ حلول

وهي مستقلة خطياً linearly independent

$$W(e^{x}, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} \\ e^{x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \neq 0 \Rightarrow \therefore y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}$$

(2) اذا كانت الجذور مكررة

Ex: find the solution of the equation

$$y'' - 6y' + 9 = 0$$

$$m^2 - 6m + 9 = 0 \Rightarrow (m-3)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 3$$

الحلول هي:

$$e^{3x}, \; x e^{3x}$$

$$\therefore y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

(3) اذا كانت الجذور عقدية

$$m_1 = a + ib, \quad m_2 = a - ib$$

$$y = e^{ax}(c_1 \sin bx + c_2 \cos bx)$$

Ex: $y'' + 4y' + 5y = 0$

$$m^2 + 4m + 5 = 0 \Rightarrow m = -2 \mp i$$

$$\therefore y = e^{-2x}(c_1 \sin x + c_2 \cos x)$$

* المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة اللامتجانسة

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n y = F(x)$$

طرق الحل: (طريقة تغيير الثوابت)

Variation of coefficients method

1) نحل الجزء المتجانس بالطرق السابقة الذكر اما الجذور مختلفة او مكررة او عقدية نجد منها الحلول ونسميها u_1, u_2

الحل للجزء المتجانس $\therefore y_c = c_1 u_1 + c_2 u_2$

بالنسبة للجزء غير المتجانس:

$$V_1(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{-F(t)\,u_2(t)}{a_0(t)\,W(u_1,u_2)(t)}\,dt$$

$$V_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{F(t)\,u_1(t)}{a_0(t)\,W(u_1,u_2)(t)}\,dt$$

الحل للجزء غير المتجانس $\therefore y_p = V_1 u_1 + V_2 u_2$

Ex: Find the general solution of the equation:

$$y'' + 4y = \sec 2x$$

Solution: $y'' + 4y = 0 \Rightarrow m^2 + 4 = 0$

$\therefore u_1(x) = \sin 2x \quad , u_2(x) = \cos 2x$

$$W(u_1,u_2) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix} = -2$$

$\Rightarrow y_c = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

$\Rightarrow y_p = V_1 \sin 2x + V_2 \cos 2x$

الآن: نحسب V_1 و V_2

$$V_1(x) = \int_0^x \frac{-\cos 2x \cdot \sec 2x}{-2} = \int_0^x \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$$

$$V_2(x) = \int_0^x \frac{\sin 2x \cdot \sec 2x}{-2} = \int_0^x -\frac{1}{2}\tan 2x = \frac{1}{4}\ln \cos 2x$$

$$\therefore y_p = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}(\ln \cos 2x) \cdot \cos 2x$$

$$\Rightarrow y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + y_p$$

general solution

---

* معادلة أويلر , Euler equation

$$a_0 x^n y^{(n)}(x) + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} x y'(x) + a_n y = f(x)$$

حيث الـ $a_1, \ldots, a_n$ ثوابت اختيارية

لحل هذا النوع من المعادلات نفرض أن $x = e^t$ فيكون $t = \log x$

$$\boxed{x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}} = Dy$$

$$\boxed{x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}}$$

$$= (D^2 - D)y = D(D-1)y$$

then $x^n \dfrac{d^n y}{dx^n} = D(D-1)\cdots(D-n+1)y$

Ex; Solve: $x^2 y'' + x y' - 9y = 5x$

solution;

نفرض $x = e^t$

$x^2 y'' = D(D-1)y$

$x y' = Dy$

$$(D(D-1) + D - 9)y = 5e^t$$

$$(D^2 - 9)y = 5e^t$$

$$m^2 - 9 = 0 \Rightarrow m = \mp 3$$

$y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}$:الحل المتجانس

$y_p = Ae^t$

$y_p' = Ae^t$ and $y_p'' = Ae^t$

$Ae^t - 9Ae^t = 5e^t$

$A = \frac{-5}{8} \Rightarrow \therefore y_p = -\frac{5}{8}e^t$

$y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t} - \frac{5}{8}e^t$

$y = c_1 x^3 + \frac{c_2}{x^3} - \frac{5}{8}x$

---

* Definition: let $\bar{y} = A(t)y$ differen system, $y(0) = \eta$

let $u(t)$ vector satisfy $u'(t) = A(t)u(t)$

$u(0) = \eta$

then $u(t)$ is solution of the system:

EX: prove that $u(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$ solution of the system

$y' = Ay$, where $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Solution:

$u(0) = \begin{bmatrix} \cos 0 \\ -\sin 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$u'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} = Au$

EX: H.W prove $u(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{bmatrix}$ is solution of $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & +\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

* Reduce the differential equation of order n to first order:-

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f(t)$$

Let $y_1 = y$ then $y_1' = y_2$

$y_2 = y'$ $\qquad y_2' = y_3$

$y_3 = y''$ $\qquad \vdots$

$\vdots$ $\qquad y_{n-1}' = y_n$

$y_{n-1} = y^{(n-2)}$ $\qquad y_n' = y^{(n)} = -a_n(t)y_1 - a_{n-1}(t)y_2 + \dots - a_1(t)y_n + f(t)$

$y_n = y^{(n-1)}$

نكتبها بصيغة المصفوفات

$$y' = A(t)y + g(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ - & - & - & & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \dots & & a_1(t) \end{bmatrix}, \quad g(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{bmatrix}$$

Ex: Reduce the initial value problem

$$y''' + y' + 3y = e^t$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$$

to first order

Solution:

Let $y_1 = y$ then $y_1' = y' = y_2$

$y_2 = y'$ $\qquad y_2' = y'' = y_3$

$y_3 = y''$ $\qquad y_3' = y''' = -y_2 - 3y_1 + e^t$

then: $$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}$$

and $y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ex: H.W

$$y^{(4)} + 2t\,y''' + t^2 y'' + t^3 y' + t^4 y = e^{3t}$$

Write the linear system of order one.

theorem: If $u_1, u_2, \dots, u_n$ functions linearly dependent then $W(u_1, u_2, \dots, u_n) \equiv 0$. Otherwise $W \not\equiv 0$ then the functions are linearly independent.

Ex: $u_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} t^2 \\ t^2 \end{bmatrix}$

$$W(u_1, u_2)(t) = \begin{bmatrix} t & t^2 \\ t & t^2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow u_1, u_2 \text{ linearly dependent}$$

Ex: H.W $u_1(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}$ $u_2(t) = \begin{bmatrix} 3e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{bmatrix}$ $u_3(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 3e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$

* Homogenous Linear system with constant coefficients:

النظم الخطيه المتجانسة ذات المعاملات الثابتة.

لإيجاد حل لنظام متجانس من المعادلات الخطيه بأستخدام

القيم والمتجهات الذاتيه هناك 3 ثلاث حالات (1) القيم الذاتيه مختلفه

(2) القيم الذاتيه عقدية (3) القيم الذاتيه مكررة.

الحالة الاولى:

Ex:

$$y_1' = 9y_1 - 3y_2$$

$$y_2' = -3y_1 + 12y_2 - 3y_3$$

$$y_3' = -3y_2 + 9y_3$$

in matrix form: $y' = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 12 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} y$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 12-\lambda & -3 \\ 0 & -3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-6)(\lambda-9)(\lambda-15) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 15$$

when $\lambda_1 = 6 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = 0$

$$\Rightarrow V^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

when $\lambda_2 = 9 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = 0$

$$\Rightarrow V^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

when $\lambda_3 = 15 \Rightarrow \begin{bmatrix} -6 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = 0$

$$\Rightarrow V^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

the general solution $y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{9t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{15t}$

لان القيم الذاتية مختلفة الحل العام يكون

$$y = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 V_3 e^{\lambda_3 t}$$

Ex H.W $\quad y' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Ex: $y' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} y$

الحالة الثالثة :

$\det(A - \lambda I) = 0$

$(3-\lambda)(1-\lambda) + 10 = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda = 2 \mp 3i$$

$$\lambda = 2+3i \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-3i & 2 \\ -5 & -1-3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$(1-3i)v_1 + 2v_2 = 0$; $v_1 = 2$, $v_2 = -(1-3i)$

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1+3i \end{bmatrix}$$

$$y_1(t) = e^{(2+3i)t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1+3i \end{bmatrix}$$

$$= e^{2t}(\cos 3t + i \sin 3t) \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= e^{2t}\left(\cos 3t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \sin 3t \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + i \sin 3t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + i \cos 3t \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= e^{2t} \begin{bmatrix} 2\cos 3t \\ -\cos 3t - 3\sin 3t \end{bmatrix} + i e^{2t} \begin{bmatrix} 2\sin 3t \\ -\sin 3t + 3\cos 3t \end{bmatrix}$$

بنفس الطريقة نجد $y_2(t)$ عندما $\lambda = 2-3i$

$\therefore y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$

Ex: H.W

$$y' = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

الحالة الثالثة: عندما توجد جذور مكررة في هذه الحالة يكون عدد المتجهات الذاتية eigenvector أقل من عدد القيم الذاتية eigenvalue فإنه من الضروري أن نجد حلولاً أخرى بشكل مغاير (حلول إضافية تشمل حاصل ضرب متعددات الحدود في الدالة الأسية).

Ex: $y = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & -5 & 18 \\ 0 & -3 & 10 \end{bmatrix}$

Solution:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 9 \\ 0 & -5-\lambda & 18 \\ 0 & -3 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-4) = 0$$

$$\lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 1$$

$$\text{when } \lambda_1 = 4 \Rightarrow (A - 4I)V = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 9 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = 0$$

$-3V_1 - 3V_2 + 9V_3 = 0 \quad \ldots (1)$

$-9V_2 + 18V_3 = 0 \quad \ldots (2)$

$-3V_2 + 6V_3 = 0 \quad \ldots (3)$

من المعادلة (3)

$V_2 = 2V_3$

let $V_3 = k = 1$

كمية ثابتة

$$\therefore V^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Now: $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$$(A - 1I)V = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 9 \\ 0 & -6 & 18 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} -3V_2 + 9V_3 = 0 \\ -6V_2 + 18V_3 = 0 \\ -3V_2 + 9V_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow V_2 = 3V_3$$

let $V_3 = 1 \Rightarrow V_2 = 3$

نأخذ أي عدد لـ V_1 وليكن 2

$$\therefore V^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نفرض V_1 وليكن 1

$$\therefore V^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vectors $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ linearly independent

$$\therefore\ y(t) = c_1 \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} e^{t} + c_3 \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} e^{t}$$

لو كانت المتجهات غير مستقلة dependent أي أنها لا تشكل حلول
كما في المثال التالي:

Ex: $y' = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix} y$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

- $(A - 2I)v = \begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = 0$

$-v_1 - v_2 = 0$

$v_1 + v_2 = 0$

let $v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = -1 \Rightarrow v^{(1)} = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$

أي قيمة اختيارية سوف ينتج vector من مضاعفات $v^{(1)}$ وبالتالي فهي ليست مستقلة independent لذلك نلجأ للطريقة التالية.

نفرض الصيغة التالية:

$y = vte^{\lambda t} + we^{\lambda t}$

- $y_1 = (v_1 t + w_1)e^{2t}$

$y_2 = (v_2 t + w_2)e^{2t}$

لإيجاد v_1, v_2, w_1, w_2 نعوض في النظام

$y_1' = y_1 - y_2$

$y_2' = y_1 + 3y_2$

$\Rightarrow (2v_1 t + 2w_1 + v_1)e^{2t} = (v_1 t + w_1)e^{2t} - (v_2 t + w_2)e^{2t}$

$(2v_2 t + 2w_2 + v_2)e^{2t} = (v_1 t + w_1)e^{2t} + 3(v_2 t + w_2)e^{2t}$

بتبسيط المعادلتين نجد الآتي:

ناخذ معادلة واحدة نشتغلها

من ①

$$(v_1+v_2)t + v_1 + w_1 + w_2 = 0 \quad \dots ①$$

$$(-v_1-v_2)t - 2v_1 - w_1 - w_2 = 0 \quad ②$$

$$\Rightarrow w_2 = -v_1 - w_1, \qquad v_2 = -v_1$$

نفرض v_1 و w_1 اختياريان

$$\Rightarrow v_2 = -v_1 \quad \Rightarrow \text{let } v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = -1$$

$$w_2 = -v_1 - w_1 \quad \Rightarrow \text{let } w_1 = 1 \Rightarrow w_2 = -2$$

$$\therefore y_1 = (t+1)e^{2t}$$

$$y_2 = (-t-2)e^{2t}$$

$$\therefore v^{(2)} = \begin{bmatrix} t+1 \\ -t-2 \end{bmatrix}$$

$$y = c_1 v^{(1)} e^{\lambda t} + c_2 v^{(2)} e^{\lambda t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} t+1 \\ -t-2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

---

* **Fundamental Matrix:**

اذا كانت $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$ حلول متجهة عددها n ومستقلة خطياً للنظام المعادلات التفاضلية $y' = AY$

فان

$$y(t) = c_1 y^{(1)}(t) + c_2 y^{(2)}(t) + \dots + c_n y^{(n)}(t)$$

حيث $c_1, c_2, \dots, c_n$ ثوابت اختيارية

اذا كانت $\psi(t)$ مصفوفة أعمدتها $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$ يمكن التعبير بحالة مكافئة $\boxed{y(t) = \psi(t)\, C}$ حيث $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$

يقال للمصفوفة $\psi(t)$ مصفوفة أساسية fundamental للنظام اذا شكلت اعمدتها حلول للنظام ومستقلة خطياً (مصفوفة حل النظام)

تكون الاعمدة مستقلة خطياً اذا: $W(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)})(t) \neq 0$

$$\because y(t) = \psi(t)\, C$$

$$\text{then } C = \psi^{-1}(t_0)\, y(t_0)$$

$$\Rightarrow y = \psi(t)\, \psi^{-1}(t_0)\, y_0 \quad \dots ①$$

نستنتج أن : y في المعادلة الاخيرة ① يمثل حلاً لمسألة القيم الابتدائية

$$y' = Ay$$
$$y(t_0) = y_0$$

(initial Value problem IVP)

Ex: Find the solution of the IVP:

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} y \quad , \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Solution:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 12 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 36 = 0$$

$$(\lambda - 7)(\lambda + 5) = 0$$

$$\lambda_1 = 7 , \lambda_2 = -5$$

when $\lambda = 7 \Rightarrow v^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{7t}$

when $\lambda = -5 \Rightarrow v^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5t}$

$$\therefore \ V(t) = \begin{bmatrix} 2e^{7t} & -2e^{-5t} \\ e^{7t} & e^{-5t} \end{bmatrix}$$

$$V(0) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow V^{-1}(0) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = V^{-1}(t_0) y_0 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore y(t) = V(t) C$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2e^{7t} & -2e^{-5t} \\ e^{7t} & e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{7t} - e^{-5t} \\ \frac{1}{2} e^{7t} + \frac{1}{2} e^{-5t} \end{bmatrix}$$

Ex: H.W Find the solution of the IVP:

$$y' = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} y \quad , \quad y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ex: Prove that

$$\phi(t)=\begin{bmatrix} e^{t} & e^{2t} & e^{-3t} \\ e^{t} & 2e^{2t} & 7e^{-3t} \\ e^{t} & e^{2t} & 11e^{-3t} \end{bmatrix}$$

is fundamental matrix of the system

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{bmatrix} y$$

معناه نبرهن ان الأعمدة حلول
وأن المحدد ≠ صفر

Solution

(1) $$y^{(1)'} = \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{bmatrix} = A(t)\, y^{(1)}(t)$$

$$y^{(2)'} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 4e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 4e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$y^{(3)'} = \begin{bmatrix} -3e^{-3t} \\ -21e^{-3t} \\ -33e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-3t} \\ 7e^{-3t} \\ 11e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3e^{-3t} \\ -21e^{-3t} \\ -33e^{-3t} \end{bmatrix}$$

(2) $$W(y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, y_3^{(3)}) = \begin{vmatrix} e^{t} & e^{2t} & e^{-3t} \\ e^{t} & 2e^{2t} & 7e^{-3t} \\ e^{t} & e^{3t} & 11e^{-3t} \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

H.W ; prove that $\phi(t)$ is a fundamental matrix of the system $Y' = AY$ where $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ and $\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ 0 & -2e^{-t} \end{bmatrix}$

Non Homogenouse Linear System:

$y' = A(t)y + g(t)$ المعادلة التفاضلية الخطية اللامتجانسة ... (2)

$y' = A(t)y$ المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ... (3)

Theorem: the particular solution U_p of the nonhomogeneous equation $u_p(t) = \Psi(t)\int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s)g(s)\,ds$ ... (4)

the general solution of the nonhomogeneous $y = \Psi + U_p$

$$y(t) = \Psi(t)C + \Psi(t)\int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s)g(s)\,ds$$

$$= \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)y_0 + \Psi(t)\int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s)g(s)\,ds$$

Ex: Solve the system $y' = Ay + g$

where $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $g(t) = \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$

١) نجد القيم الذاتية
٢) نجد المصفوفة الأساسية $\Psi(t)$
٣) نجد الحل المتجانس $\Psi(t)\Psi^{-1}(0)y_0$
٤) نجد الحل اللامتجانس ($u_p(t)$ معادلة 4)

Solution:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3$$

when $\lambda_1 = -1 \Rightarrow (A + 1I)V^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = 0$

$$\left.\begin{aligned} 2V_1 + 4V_2 &= 0 \\ V_1 + 2V_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_1 = -2V_2 \Rightarrow V^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

when $\lambda_2 = 3 \Rightarrow (A - 3I)V^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = 0$

$$V_1 = 2V_2 \Rightarrow V^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \Psi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} & 2e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix}$ is the fundamental matrix

$$\Psi^{-1}(t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{-t} & -2e^{-t} \\ e^{-3t} & 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

Since $g(t) = \begin{bmatrix} -10e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}$

$$\therefore y_p = \begin{bmatrix} 2e^{-t} & 2e^{3t} \\ -e^{t} & e^{3t} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{s} & -2e^{s} \\ e^{-3s} & 2e^{-3s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -10e^{3s} \\ e^{3s} \end{bmatrix} ds$$

الحل الخاص

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 16t+6 \\ 8t-3 \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$y = \begin{bmatrix} 2e^{-t} & 2e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix} C - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 16t+6 \\ 8t-3 \end{bmatrix} e^{3t}$$

H.W: Find the particular solution يعني y_p معناه

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

---

* Series of Matrices متسلسلة المصفوفات

قبل البدء بهذا الموضوع علينا مراجعة لإيجاد حل الأنظمة:

١- المتجانسة $Y' = AY$ الحل هو $y(t) = C_1 [V_1] e^{\lambda_1 t} + C_2 [V_2] e^{\lambda_2 t}$

٢- المتجانسة التي تحوي شروط ابتدائية $Y' = AY$, $Y(0) = \eta$

الحل هو

$$y(t) = \Psi(t) \cdot C$$

where $C = \Psi^{-1}(t_0)\, Y(0)$, $\Psi(t)$ مصفوفة أساسية

٣- اللامتجانسة

$$Y' = AY + g(t) \ , \ Y(0) = \eta$$

الحل هو

$$y(t) = \Psi(t) C + \Psi(t) \int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s) g(s)\, ds$$

where $C = \Psi^{-1}(t_0) y_0$, $\Psi(t)$ مصفوفة أساسية

الآن نأخذ طريقة اخرى لايجاد المصفوفة الاسية

series of Matrices

Definition: let $Y' = AY$ system of differential equations, A matrix of dimention $n \times n$ then

$$e^{A} = I + A + \frac{1}{2} A^{2} + \cdots + \frac{A^{k}}{k!} + \cdots$$

the Partial sum:

$$S_k = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!}$$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ find e^{A}

Solution:

$$e^{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & (-3)^2 \end{bmatrix} + \cdots$$

بصورة عامة اذا كانت A مصفوفة قطرية

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 \cdots & 0 \\ 0 & \cdots 0 \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

then: $$e^{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} d_1^2 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & d_n^2 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!} t^2 A^2 + \cdots + \frac{1}{k!} t^k A^k + \cdots$$

$$\frac{d(e^{tA})}{dt} = A + \frac{2}{2!} tA^2 + \cdots + \frac{k}{k!} t^{k-1} A^k + \cdots$$

$$= A\left[I + tA + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^{k-1} + \cdots\right]$$

$$= A e^{tA}$$

Ex: Find the fundamental matrix of the system $y' = Ay$, where

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 \cdots & 0 \\ 0 & 0 \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Solution:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} d_1^2 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & d_n^2 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_1^k t^k}{k!} & & \bigcirc \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_2^k t^k}{k!} & \\ \bigcirc & & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_n^k t^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & & \bigcirc \\ & e^{d_2 t} & \\ \bigcirc & & e^{d_n t} \end{bmatrix}$$

Ex: Find the fundamental matrix of the system $Y' = AY$ where $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Solution: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$e^{At} = e^{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t} \cdot e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \underset{\text{ضرب}}{\cdot} \left\{ I + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots}_{\text{صفر}} \right\}$$

by $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

لذلك المتسلسلة تنتهي بعد حدين

$$e^{At} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$