Lecture (13)

Semi-Lagrangian Advection Scheme (Part 1)

**نظام التأفق شبه اللا كرانجي (الجزء الأول)**

**13.1 Introduction**

توجد طريقتان لوصف جريان مائع:

1. جريان اويلر Eulerian Flow: ابقى في مكانك وشاهد الجريان.

نحن نشير الى تغير السرعة مع الزمن عند نقطة ثابتة بالمشتقة الأويلرية (او الجزئية)،

لنتكلم عن التغير الاويلري او المحلي local بشيء من التفصيل:

قف على جسر، علق محرار داخل مجرى تيار النهر. درجة الحرارة التي تقيسها تكون عند موقع ثابت. يكون التغير في درجة الحرارة محلياً، ويعطى بالمشتقة الزمنية الجزئية:

1. جريان لاكرانجيFlow Lagrangian : انجرف مع التيار وانظر اين تذهب.

نحن نسمي التغير في السرعة مع الزمن ومن خلال متابعة الجريان بالمشتقة اللاكرانجية (او المادية material او الكلية total ):

الآن أصعد قارب، وعلق المحرار في النهر. ان درجة الحرارة التي تقيسها تكون عند نقطة تتحرك مع التيار. ان التغير في درجة الحرارة يعأأأا

طى بالمشتقة الزمنية الكلية:

س/ ما هي العلاقة بين و ؟

ان السرعة هي دالة لكل من الفضاء والزمن:

V=V(x(t), y(t), z(t), t).

ان التغير الكلي، بمتابعة الجريان، يعطى بقانون السلسلة chain rule :

*ان هذه القاعدة تصح لجميع المتغيرات.*

* *لقد وجد بان نظام طفرة الضفدع الاويلري هو مستقر شرطياً* conditionally stable.
* *وكذلك نعرف ان شرط الاستقرارية هو معيار* CFL*:*
* For high spatial resolution (small x) this severely limits the maximum time step t that is allowed.
* In numerical weather prediction (NWP), timeliness of the forecast is of the essence.
* In this lecture, we study an alternative approach to time integration, which is unconditionally stable and so, free from restrictions of the CFL condition.

 **13.2 The Basic Idea of Semi-Lagrangian Scheme الفكرة الاساسية للنظام الشبه – لاكرانجي**

The semi-Lagrangian scheme for advection is based on the idea of approximating the Lagrangian time derivative.

It is so formulated that the numerical domain of dependence always includes the physical domain of dependence. This necessary condition for stability is satisfied automatically by the scheme.

In a fully Lagrangian scheme, the trajectories of actual physical parcels of fluid would be followed throughout the motion.

The problem with this approach is that the distribution of representative parcels rapidly becomes highly non-uniform.

In the semi-Lagrangian scheme the individual parcels are followed only for a single time-step. After each step, we revert to a uniform grid.

The semi-Lagrangian algorithm has enabled us to integrate the primitive equations using a time step of 15 minutes. This can be compared to a typical time step of 2.5 minutes for conventional schemes.

The consequential saving of computation time means that the operational numerical guidance is available to the forecasters much earlier than would otherwise be the case.

Semi-Lagrangian advection schemes are now in widespread use in all the main Numerical Weather Prediction centres.

**13.3 The Eulerian and the Lagrangian Approach**

We consider the *linear advection equation* which describes the conservation of a quantity Y(x, t) following the motion of a fluid flow in one space dimension with constant advecting velocity c.

This may be written in either of two alternative forms:

The general solution is Y = Y (x − ct).

To develop numerical solution methods, we may start from either the Eulerian or the Lagrangian form of the equation. For the semi-Lagrangian scheme, we choose the latter.

Since the advection equation is linear, we can construct a general solution from Fourier components

This expression may be separated into the product of a function of space and a function of time:

Therefore, in analyzing the properties of numerical schemes, we seek a solution of the form

where

The character of the solution depends on the modulus of A:

If |A| < 1, the solution decays with time.

If |A| = 1, the solution is neutral with time.

If |A| > 1, the solution grows with time.

In the third case (growing solution), the scheme is unstable.