Lecture (14)

Semi-Lagrangian Advection Scheme (Part2)

**نظام التأفق شبه اللا كرانجي (الجزء الثاني)**

**14.1 Numerical Domain of Dependence المجال العددي للاعتماد**

في نظام طفرة الضفدع الاويلري، تعتمد قيمة Yp,q عند زمن وموقع على قيم ضمن المنطقة المؤشرة بالنجوم (انظر الشكل 14.1). وتكون القيم خارج هذه المنطقة ليست ذات تأثير على Yp,q . كل قيمة محسوبة لـ **Yp,q** تعتمد على قيم محسوبة سابقاً وعلى الشروط الأولية. ان مجموعة النقاط التي تؤثر على قيمة Yp,q تسمى المجال العددي للاعتماد لـ Yp,q . من الواضح بالاستناد على ارضيات فيزيائية physical grounds أنه اذا كان طرد المائع الواصل الى النقطة عند الزمن متولداً خارج المجال العددي للاعتماد، فأن النظام العددي لا يستطيع ان يثمر نتيجة دقيقة: فالمعلومات الضرورية غيرة متوفرة للنظام. سيئة اخرى، هي ان الحل العددي ربما لا يحمل مطلقاً اي علاقة مع الحل الفيزيائي وربما ينمو أسياً مع الزمن حتى عندما يكون الحل الصحيح مقيداً true solution is bounded . الشرط الضروري لتجنب هذه الظاهرة هي ان المجال العددي ينبغي ان يتضمن المسار الفيزيائي physical trajectory. ان هذا الشرط يتحقق بواسطة النظام الشبه-لاكرانجي.

\*\*\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

0

q

q-1

q-2

q-3

p

p-1

p-2

p-3

p+1

p+2

p+3

**Figure 14.1 Numerical domain of dependence**

**14.2 Parcel coming from outside domain of dependence**

افرض ان خط النقاط (•)، (الشكل 14.2 ) يمثل مسار طرد. ان القيمة في اي مكان على المسار هي Yp,q .

ولأن الطرد يتولد خارج المجال العددي للاعتماد، فأن النظام الأويلري لا يستطيع نمذجته بشكل صحيح. ان الفكرة المركزية للنظام اللاكرانجي هي تمثيل المسار الفيزيائي لطرد المائع.

نأخذ بنظر الاعتبار طرد يصل نقطة الشبكة عند الزمن الجديد ونتسائل من اين اتى. نقطة المغادرة departure point لن تكون اعتيادياً نقطة شبكة. وعليه يجب ان تحسب القيمة عند نقطة المغادرة بعملية الاستقراء interpolation من النقاط المحيطة. ولكن هذا الاستقراء يؤكد بان المسار يقع ضمن المجال العددي للاعتماد. سوف نظهر بأن هذا يقود الى نظام مستقر عددياً.

\*\*\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

q

q-1

q-2

q-3

p-2

p-3

p-4

p-5

p-1

p

p+1

**Figure 14.2 Parcel trajectory**

**14.3 Interpolation Using Surrounding Pointsالاستقراء باستخدام النقاط المحيطة**

ان خط النقاط (o)، (انظر شكل 14.3 ) يمثل مسار الطرد. عند زمن يكون الطرد عند (•)، التي هي ليست نقطة شبكة. ان القيمة عند نقطة المغادرة تحصل بواسطة الاستقراء من النقاط المحيطة. وعليه نتأكد من ان المسار الفيزيائي يكون ضمن مجال الاعتماد العددي. المعادلة (13.1): " 0= " تقول بأن قيمة Y تكون ثابتة لطرد المائع. وبتطبيق المعادلة على الفترة الزمنية [] ، نحصل على:

او بصيغة رمزية، ، حيث تمثل القيمة عند نقطة المغادرة، التي هي اعتيادياً ليست نقطة شبكة.

q

q-1

q-2

p-2

p-5

p-1

p

p+1













**+++**

**++++++**

**+++**

**++++++**

p-4

p-3



**Figure 14.3 Parcel trajectory**

The distance travelled in time is .

We define the integer and fractional parts of *s* as follows:

Note that, by definition, .

So, the departure point falls between the grid points and . In the figure (14.4), and . A linear interpolation gives:

q+1

q

p-2

p-5

p-1

p

p+1







**+++**

**++++++**

p-4

p-3



**Figure 14.4 Parcel trajectory**

**14.4 Numerical Stability of the Scheme الاستقرارية العددية للنظام**

المعادلة المتقطعة يمكن تكتب بالشكل:

دعنا نبحث عن حل من الشكل:

او، باستبعاد الحدود المشتركة،

باعادة ترتيب الحد الاول من اليمين

الآن لنخذ بنظر الاعتبار مربع المعامل A:

ويمكن كتابة القيمة العددية للمعامل العقدي كما يلي:

We note that

Taking the largest value of (i.e. 2) gives:

Taking the smallest value of gives

In either case, , so there is numerical stability.