Integration التكامل

Indefinite integration
التكامل غير المحدد

definite integration
التكامل المحدد

① indefinite integration: التكامل غير المحدد

Rules of indefinite integration
قوانين التكامل الغير محدد:

① $\int dx = x + c$

② $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$

③ $\int (f(x))^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$

④ $\int (f(x) \mp g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \mp \int g(x)\,dx$

⑤ $\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$, k is Constant.

---

* في القاعدة رقم (3) هي تكامل دالة الدالة والتي تعني انها كل اس ماعدا (-1) $[f(x)]^{(-1)}$ ففي تكاملها يجب توفر مشتقة داخل القوس وبعدها نحذف المشتقة ونكامل بأضافة (1) للأس و القسمة على الأس الجديد.

ex 1 find $\int 3x^2\,dx$

Sol $= 3\int x^2\,dx = \cancel{3} * \frac{x^3}{\cancel{3}} + c$

$= x^3 + c$

ex 2 $\int \left(\frac{1}{x^2} + x\right) dx$

Sol $\int \frac{1}{x^2}\,dx + \int x\,dx = \int x^{-2}\,dx + \int x\,dx$

$= \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{2} + c = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + c$

ex. 3 $\int x \cdot \sqrt{x^2+1}\;dx$

Sol

$= \int (x^2+1)^{1/2} \cdot x\,dx \quad * \frac{2}{2}$

$= \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{1/2} \cdot 2x\,dx$

$= \frac{1}{2} * \frac{(x^2+1)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{\cancel{2}} * \frac{\cancel{2}}{3}(x^2+1)^{3/2}$

$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + c$

ex. 4 $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx$

Sol $\int (1+\sqrt{x}) * \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \quad * \frac{2}{2} = \int (1+\sqrt{x}) \frac{2}{2\sqrt{x}} \cdot dx$

$= 2\int (1+\sqrt{x}) * \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

٢

$= \cancel{2} * \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\cancel{2}} + c = (1+\sqrt{x})^2 + c$

ex.5 $\int (3t + t^{-3})^2 \, dt$

Sol $\int (9t^2 + 6t^{-2} + t^{-6}) \, dt$

$= 9\int t^2 dt + 6\int t^{-2} dt + \int t^{-6} dt$

$= 9 * \frac{t^3}{3} + 6 * \frac{t^{-1}}{-1} + \frac{t^{-5}}{-5} + c$

$= 3t^3 - \frac{6}{t} - \frac{t^{-5}}{5} + c$

ex.6 $\int \left(\frac{x}{3x^2+4}\right)^2 \frac{dx}{x}$

Sol

$\int \frac{x^{2}}{(3x^2+4)^2} * \frac{dx}{x} = \int (3x^2+4)^{-2} \cdot x \, dx \quad * \frac{6}{6}$

[تكامل دالة الدالة]

$= \frac{1}{6} \int (3x^2+4)^{-2} \, 6x \, dx = \frac{1}{6} * \frac{(3x^2+4)^{-1}}{-1} + c$

$= \frac{-1}{6(3x^2+4)} + c$

ex.7

$\int \sqrt{x^2 - x^4} \, dx$

Sol $\int \sqrt{x^2(1-x^2)} \, dx = \int x \cdot \sqrt{1-x^2} \, dx$

$= \int (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot x \, dx \quad * \frac{-2}{-2} = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (-2x) dx$

$= -\frac{1}{2} * \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{2} * \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + c$

$= -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + c$

تكامل الدوال المثلثية

① $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

② $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

③ $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

④ $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$ حفظ

⑤ $\int \sec x \cdot \tan x \, dx = \sec x + c$

⑥ $\int \csc x \cdot \cot x \, dx = -\csc x + c$

ملاحظة: في جميع الدوال المثلثية يجب توفر مشتقة الزاوية حتى نكامل.

ex.1

$$\int \cos(7x+1)\, dx$$

sol

$$\int \cos(7x+1)\, dx \times \frac{7}{7}$$

$$= \frac{1}{7}\int \cos(7x+1) \cdot 7 \, dx = \frac{1}{7} \sin(7x+1) + c$$

ex.2

$$\int x \cdot \sin(2x^2)\, dx$$

sol

$$\int \sin(2x^2) \cdot x \times \frac{4}{4} \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin(2x^2) \cdot 4x \, dx$$

$$= -\frac{1}{4} \cos(2x^2) + c$$

ex. 3 $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

$\sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

Sol $\displaystyle\int \sec^2\theta \, d\theta = \tan\theta + c$

ex. 4

$$\int \cos^2 2x \cdot \sin 2x \, dx$$

Sol $\displaystyle\int \cos^2 2x \cdot \sin 2x \, dx \times \frac{-2}{-2}$ [تكامل دالة ، دالة]

$= -\frac{1}{2}\displaystyle\int \cos^2 2x \cdot -2\sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} \times \frac{\cos^3 2x}{3} + c$

$= -\frac{1}{6} \cos^3 2x + c$

ex. 5

$$\int \sec^3 x \cdot \tan x \, dx$$

Sol

$\displaystyle\int \sec^2 x \cdot \underbrace{\sec x \cdot \tan x \, dx}_{\text{مشتقة الدالة}}$

$= \frac{\sec^3 x}{3} + c$

ex. 6 $\displaystyle\int \sqrt{2 + \sin 3t} \cdot \cos 3t \, dt.$

Sol $\displaystyle\int (2 + \sin 3t)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos 3t \, dt \quad * \frac{3}{3}$

$= \frac{1}{3}\displaystyle\int (2 + \sin 3t)^{\frac{1}{2}} \cdot 3\cos 3t \, dt.$

$= \frac{1}{3} \times \frac{(2 + \sin 3t)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} (2 + \sin 3t)^{3/2} + c$

$= \frac{2}{9} (2 + \sin 3t)^{3/2} + c$

ex. 7 $\int (1-\sin^2 4x)\cdot \cos 4x \, dx$.

Sol $\int (\cos 4x - \sin^2 4x \cdot \cos 4x)\, dx$

$= \int \cos 4x \, dx - \int \sin^2 4x \cdot \cos 4x \, dx \quad * \frac{4}{4}$

$= \int \cos 4x \, dx * \frac{4}{4} - \int \sin^2 4x \cdot \cos 4x \, dx * \frac{4}{4}$

$= \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} * \frac{\sin^3 4x}{3} + c$

$= \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{12} \sin^3 4x + c$

ex. 8

$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Sol $\int \sin\sqrt{x} * \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \quad * \frac{2}{2}$

$= 2 \int \sin\sqrt{x} * \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = -2\cos\sqrt{x} + c$

ex. 9 $\int \frac{\cot^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $\boxed{\cot^2\sqrt{x} = \csc^2\sqrt{x} - 1}$

$= \int \frac{\csc^2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \, dx = \int \frac{\csc^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

$= \int \frac{\csc^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx * \frac{2}{2} - \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx$

$= 2 \int \csc^2\sqrt{x} * \frac{dx}{2\sqrt{x}} - \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx$

$= 2 * -\cot\sqrt{x} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$

$= -2\cot\sqrt{x} - 2x^{\frac{1}{2}} + c$

$= -2\cot\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + c$

ملاحظة: لإيجاد التكامل للدوال التالية نطبق القواعد التالية

① $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c$

② $\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$

③ $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

④ $\int \csc x \, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + c$

ex ① $\int \tan(3x+5)\, dx$

sol

$\int \tan(3x+5)\, dx * \frac{3}{3}$

$= \frac{1}{3}\int \tan(3x+5) \cdot 3\, dx = -\ln|\cos(3x+5)|$

ex. 2: $\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\, dx$

sol

$\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \sec x\, dx$

$= \ln|\sec x + \tan x| + c$

ex. 3 $\int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}\, dx$

sol

$\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx + \int \frac{\cos x}{\cos x}\, dx = \int \tan\, dx + \int dx$

$= -\ln|\cos x| + x + c$

Integration of The e^x and a^x

* عند تكامل دالة (e^x) ، (a^x) نطبق التالي

① $\int e^{f(x)} * f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$

اي تنزلها نفسها عند توفر مشتقة الأس

② $\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}$

عند توفر مشتقة الدالة

ex 1 $\int e^x\, dx$

<u>Sol</u> $= e^x + c$

ex. 2 $\int e^{3x}\, dx$

<u>Sol</u> $\int e^{3x}\, dx * \frac{3}{3} = \frac{1}{3} \int e^{3x} \cdot 3\, dx$

$= \frac{1}{3} e^{3x} + c$

ex-3 $\int e^{\sin x} \cdot \cos x\, dx$

<u>Sol</u> $= e^{\sin x} + c$

ex 4) $\int 2^x \, dx$

Sol $= \frac{2^x}{\ln 2} + c$

ex 5) $\int x \cdot 3^{x^2} \, dx$

$= \int x \cdot 3^{x^2} \, dx * \frac{2}{2}$

$= \frac{1}{2} \int 3^{x^2} \cdot 2x \, dx = \frac{1}{2} * \frac{3^{x^2}}{\ln 3} + c$

ex. 6) $\int e^{\ln 5^x} \, dx$

Sol $\int e^{\ln 5^x} \, dx = \int 5^x \, dx$

$= \frac{5^x}{\ln 5} + c$

ex. 7) $\int 3^{\sec x} \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx$

$= \frac{3^{\sec x}}{\ln 3} + c$

ex. 8) $\int \frac{\ln^2 x}{x} \, dx$

Sol $\int \ln^2 x * \frac{1}{x} \, dx = \frac{\ln^3 x}{3} + c$

ex. 9

$$\int \frac{dx}{x\ln x}$$

Sol $\int \frac{dx}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \ln(\ln x) + c$

Ex 10

$$\int \frac{\cot x}{\csc x}\,dx$$

$\cot = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\csc = \frac{1}{\sin x}$

Sol $\int \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}} = \int \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} * \cancel{\sin x}\,dx$

$= \int \cos x\,dx = \sin x + c$

ex. 11

$$\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\,dx$$

$\sec = \frac{1}{\cos x}$

Sol $\int \frac{\sec^3 x}{\sec x}\,dx + \int \frac{e^{\sin x}}{\sec x}\,dx$

$= \int \sec^2 x\,dx + \int \frac{e^{\sin x}}{\frac{1}{\cos x}}\,dx$

$= \int \sec^2 x\,dx + \int e^{\sin x} \cdot \cos x\,dx$

$= \tan x + e^{\sin x} + c$

ex. 12 $\int \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}} \, dx$

Sol

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$= \int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} * \frac{2}{2} \, dx - \int x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \int e^{\sqrt{x}} * \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2e^{\sqrt{x}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2e^{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + c$$

definite integration التكامل المحدد

* في هذا الموضوع من التكامل نضيف فقط حدود التكامل ونطبق القواعد الخاصة بالتكامل غير المحدد ونلغي ثابت التكامل (c)

ex1 $\int_0^3 x\cdot 3^{x^2}\, dx$

Sol

$$\int_0^3 3^{x^2}\cdot x\, dx \quad * \frac{2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 3^{x^2}\cdot 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{3^{x^2}}{\ln 3}\Big|_0^3 = \frac{1}{2\ln 3}\cdot 3^{x^2}\Big|_0^3$$

$$= \frac{1}{2\ln 3}\left[3^{(3)^2} - 3^0\right] = \frac{1}{2\ln 3}\left[3^9 - 1\right]$$

ex2 $\int_1^3 e^{3x}\cdot dx$

Sol

$$\int_1^3 e^{3x}\, dx \quad * \frac{3}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^3 e^{3x}\cdot 3\, dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x}\Big|_1^3 = \frac{1}{3}\left[e^{3\times 3} - e^{3\times 1}\right] = \frac{1}{3}\left[e^9 - e^3\right]$$

ex.3 $\int_{2}^{6} \frac{dx}{x+2}$

Sol $\int_{2}^{6} (x+2)^{-1}\,dx = \ln(x+2) \Big|_{2}^{6}$

$= \ln(6+2) - \ln(2+2)$

$= \ln 8 - \ln 4$

$= \ln 2^3 - \ln 2^2 = 3\ln 2 - 2\ln 2 = \ln 2$

REDMI NOTE 9 PRO
AI QUAD CAMERA

طرق التكامل
Method of integration

① Integration by parts التكامل بالتجزئة

* تستخدم هذه الطريقة عندما توجد دالتان مضروبتان ولا تمثل احدهما مشتقة للأخرى .

وبالصيغة التالية $\int f(x).g(x)dx$

** خطوات الحل -

① نفرض احدهما $= u$ والأخرى $= dv$ وكالاتي

let $f(x) = u$, $g(x) = dv$

وبعدها نشتق (u) فنحصل على $\leftarrow du$

ونكامل (dv) فنحصل على $\leftarrow v$

② نطبق القانون

$$\boxed{u\,dv = u * v - \int v\,du}$$

حفظ

ex-1

$$\int x \cos x\, dx$$

Sol

let $u = x \longrightarrow du = dx$

let $dv = \cos x\,dx \longrightarrow v = \int \cos x\,dx = \sin x$

والآن نطبق القانون

$$\int u\,dv = u.v - \int v\,du$$

$$= x.\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x \sin x - (-\cos x) + c$$

$$= x \sin x + \cos x + c$$

١٠

ex. 2 $\int \ln x \, dx$

Sol let $u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

تطبيق القانون $\int u\,dv = u.v - \int v\,du$

$$\int \ln x \, dx = x . \ln x - \int \cancel{x} . \frac{1}{\cancel{x}} \, dx$$

$$= x \ln x - \int dx .$$

$$= x \ln x - x + c$$

ملاحظة:- في بعض الأسئلة نفرض أكثر من مرة للوصول الى الناتج النهائي.

ex. 3 $\int x^2 . e^x \, dx$

Sol let $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

let $dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$

نطبق القانون

$$\therefore \int x^2 e^x dx = e^x . x^2 - \int 2x . e^x \, dx .$$

$$= e^x . x^2 - 2 \int x . e^x \, dx$$

نفرض مرة أخرى

let $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$$\therefore \int x^2 . e^x dx = x^2 . e^x - 2 \left[x . e^x - \int e^x dx \right]$$

$$= x^2 . e^x - 2xe^x - 2 \int e^x dx$$

$$\therefore \int x^2 . e^x dx = x^2 . e^x - 2xe^x - 2e^x + c$$

ex.4 $\int e^x \cdot \cos x \, dx$

Sol let $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

$dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$.

$\therefore \int e^x \cdot \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$

let $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

$dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$.

$= e^x \cdot \sin x - [e^x(-\cos x) - \int -\cos x \; e^x dx]$

$= e^x \cdot \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cdot \cos x \, dx$

$\therefore \int e^x \cdot \cos x \, dx = e^x \cdot \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cdot \cos x \, dx$

$\therefore 2 \int e^x \cdot \cos x \, dx = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x$

$\therefore \int e^x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} [e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x] + c$

ex. 5

$$\int x \cdot \ln x \, dx$$

Sol

let $u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$, $dv = x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2} x^2$

Sol

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$.

$= \int x \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$

$= \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx =$

$= \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{2} * \frac{x^2}{2} + c$

$= \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot x^2 + c$

ex. 6

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} \, dx$$

Sol

let $u \quad \Rightarrow \quad du = dx$

$dv = \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

$\Downarrow$

$v = \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \int (x-1)^{-\frac{1}{2}} dx$

$= 2 (x-1)^{\frac{1}{2}}$

$uv - \int v \, du$

$\therefore = x \cdot 2\sqrt{x-1} - \int 2 (x-1)^{\frac{1}{2}} dx = 2x\sqrt{x-1} - 2\int (x-1)^{\frac{1}{2}} dx$

$= 2x\sqrt{x-1} - 2 * \frac{(x-1)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c$

$= 2x\sqrt{x-1} - 2 * \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + c$

② Tabular integration التكامل بالجدول

* وهو جزء من طريقة التكامل بالتجزئة وتستخدم هذه الطريقة عندما توجد دالتان مضروبتان أحدهما قابلة للتكامل والأخرى قابلة للاشتقاقات إلى الصفر.

ex 1 $\int_0^1 x^2 \cdot e^x \, dx$

derivative المشتقة		integration التكامل
x^2	$+$	e^x
$2x$	$-$	e^x
2	$+$	e^x
0		e^x

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x \Big|_0^1$$

$$= \left[(1)^2 e^1 - \cancel{2(1)e^1} \cancel{+2e^1}\right] - \left[0e^0 - 2\cdot 0 \cdot e^0 + 2e^0\right]$$

$$= e^1 - 2$$

ex.2 $\int x^3 \sin x \, dx$

derivative		integrals
x^3	$+$	$\sin x$
$3x^2$	$-$	$-\cos x$
$6x$	$+$	$-\sin x$
6	$-$	$\cos x$
0		$\sin x$

$$\therefore \int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + c$$

ex.3) $\int (x^2+x+1)\cdot e^x \, dx$

Sol

derivation		integration
x^2+x+1	+	e^x
$2x+1$	−	e^x
2	+	e^x
0		e^x

$$\therefore \int (x^2+x+1)\cdot e^x \, dx = (x^2+x+1)\cdot e^x - (2x+1)\cdot e^x + 2e^x + c$$

$$= x^2e^x + xe^x + \cancel{e^x} - 2xe^x - \cancel{e^x} + 2e^x + c$$

$$= x^2e^x - xe^x + 2e^x + c$$

ex.4

$\int x^3 \cdot e^x \, dx$

derivation		integral
x^3	+	e^x
$3x^2$	−	e^x
$6x$	+	e^x
6	−	e^x
0		e^x

$$\therefore \int x^3 \cdot e^x \, dx = x^3\cdot e^x - 3x^2\cdot e^x + 6xe^x - 6e^x + c$$

ex. 5

$$\int x^3 \cdot 2^x \, dx$$

Sol

derivative		integral
x^3	$+$	2^x
$3x^2$	$-$	$\frac{2^x}{\ln 2}$
$6x$	$+$	$\frac{2^x}{(\ln 2)^2}$
6	$-$	$\frac{2^x}{(\ln 2)^3}$
0		$\frac{2^x}{(\ln 2)^4}$

$$\int x^3 \cdot 2^x \, dx = x^3 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - 3x^2 \cdot \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + 6x \cdot \frac{2^x}{(\ln 2)^3} - 6 \frac{2^x}{(\ln 2)^4} + c$$

ex. 6 $\int x^2 \cdot e^{x^2} \, dx$

Sol

Let $u = x^2$ $\quad dv = e^{x^2}$

$du = 2x\,dx$ $\quad v = \int \frac{1}{2} e^{x^2}$

$uv - \int v \, du$

ناقصة واجب

Ex.7 $\int x^2 \cdot e^{x^2}\, dx$

Sol

$$\int x^2 \cdot e^{x^2} \cdot x\, dx$$

let $u = x^2$ $\qquad dv = e^{x^2} \cdot x\,dx \;*\; \frac{2}{2}$

$du = 2x\,dx$ $\qquad V = \int \frac{1}{2} e^{x^2} \cdot 2x\,dx$

$= \frac{1}{2} \int e^{x^2} \cdot 2x\,dx$

$= \frac{1}{2} e^{x^2}$

$\therefore \int x^2 \cdot e^{x^2}\, dx = x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} \int e^{x^2} \cdot 2x\, dx$

$= x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

REDMI NOTE 9 PRO
AI QUAD CAMERA

Odd and even powers of sine and Cosine

* في حالة إعطاء (sin) او (cos) مرفوع الى إس زوجي او فردي فأننا نتبع مايلي.

① اذا كان إس (sin) او (cos) فردي فاننا نطبق العلاقة:

$$\boxed{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x} \quad \text{أو} \quad \boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$$

ex.1

$$\int \cos^5 5x \, dx$$

∵ الأس فردي

sol

$$\int (\cos^2 5x)^2 \cdot \cos 5x \, dx = \int (1 - \sin^2 5x)^2 \cdot \cos 5x \, dx$$

$$= \int (1 - 2\sin^2 5x + \sin^4 5x) \cdot \cos 5x \, dx$$

$$= \int \cos 5x \, dx \frac{5}{5} - 2\int \sin^2 5x \cdot \cos 5x * \frac{5}{5} + \int \sin^4 5x \cdot \cos 5x \, dx * \frac{5}{5}$$

$$= \frac{1}{5}\int \cos 5x \cdot 5 \, dx - \frac{2}{5}\int \sin^2 5x \, 5\cos 5x \, dx + \frac{1}{5}\int \sin^4 5x \cdot 5\cos 5x \, dx$$

$$= \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{2}{5} * \frac{1}{3}\sin^3 5x + \frac{1}{5} * \frac{1}{5}\sin^5 5x + c$$

$$= \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{2}{15}\sin^3 5x + \frac{1}{25}\sin^5 5x + c$$

ex.2 $\int \sin^3 x \, dx$

Sol $\int \sin^2 x \sin x \, dx = \int (1-\cos^2 x) \sin x \, dx$

$= \int \sin x \, dx - \int \cos^2 x \cdot \sin x \, dx \ast \frac{-1}{-1}$

$= \int \sin x \, dx + \int \cos^2 x - \sin x \, dx$

$= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c$

ج إذا كان أس (sin) أو (cos) زوجي
فإننا نطبق قانون ضعف الزاوية،

$\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)}$ أو $\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)}$

مهم،

ex.1 $\int \cos^2 2x \, dx$

Sol
$\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x) \, dx = \frac{1}{2} \int (1+\cos 4x) \, dx$

$= \frac{1}{2} \left[\int dx + \int \cos 4x \, dx \ast \frac{4}{4} \right]$

$= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4\cancel{x} \right] + c$

$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x + c$

ex.2 $\int \sin^4 3\theta \, d\theta$

Sol $\int (\sin^2 3\theta)^2 \, d\theta = \int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 6\theta)\right]^2 d\theta$

$= \frac{1}{4}\int (1-\cos 6\theta)^2 d\theta = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 6\theta + \cos^2 6\theta) d\theta$

$= \frac{1}{4}\left[\int d\theta - 2\int \cos 6\theta \, d\theta + \underline{\int \cos^2 6\theta \, d\theta}\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\int d\theta - 2\int \cos 6\theta \, d\theta * \frac{6}{6} + \frac{1}{2}\int (1+\cos 12\theta) d\theta\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\int d\theta - \frac{2}{6}\int \cos 6\theta \cdot 6 \, d\theta + \frac{1}{2}\int d\theta\right.$

$\left. + \frac{1}{2}\int \cos 12\theta \, d\theta * \frac{12}{12}\right.$

$= \frac{1}{4}\left[\int d\theta - \frac{1}{3}\int \cos 6\theta \cdot 6 \, d\theta + \frac{1}{2}\int d\theta + \right.$

$\left. \frac{1}{24}\int \cos 12\theta \cdot 12 \, d\theta \right.$.

$= \frac{1}{4}\left[\theta - \frac{1}{3}\sin 6\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{24}\sin 12\theta\right] + c$

ندخل $\frac{1}{4}$ على القوس

$= \frac{1}{4}\theta - \frac{1}{12}\sin 6\theta + \frac{1}{8}\theta + \frac{1}{96}\sin 12\theta + c$

$= \frac{3}{8}\theta - \frac{1}{12}\sin 6\theta + \frac{1}{96}\sin 12\theta + c$

* procedure of sin and cos

* في حالة وجود (sin) او (cos) مضروبان مع بعضهما وكلاهما مرفوعان الى أس وكالتالي

$$\boxed{\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx}$$

فهناك ثلاث حالات للحل :-

① اذا كان (M) فردي و (n) زوجي فنطبق العلاقة

$$\boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$$

ex ① $\int \sin^5 x \cdot \cos^2 x \, dx$

$m =$ فردي ، $n =$ زوجي

Sol

$$\int (\sin^2 x)^2 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$= (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \sin x \cdot \cos^2 x * \frac{-1}{-1} dx - 2 \int \sin x \cdot \cos^4 x \cdot \frac{-1}{-1} dx$$

$$+ \int \cos^6 x \cdot \sin x * \frac{-1}{-1}$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + 2\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

(c) اذا كانت (m) زوجي و (n) فردي فنطبق العلاقة

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

ex.2 Evaluate $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx$

Sol

m = زوجي ، n = فردي

$$\int \cos^2 x \cdot \cos x \cdot \sin^2 x \, dx$$

$$= \int (1 - \sin^2 x) \cos x \cdot \sin^2 x \, dx$$

$$= \int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx - \int \sin^4 x \cdot \cos x \, dx$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

٢ اذا كانت (m) و (n) كلاهما زوجي فاننا نطبق القانون .

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2 x &= \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x) \\ \cos^2 x &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x) \end{aligned}}$$

حفظ

ex-3 : $\int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx$

Sol

$$\int \frac{1}{2}(1+\cos 2x) * \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)(1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}\left[\int dx - \int \cos^2 2x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int dx - \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int dx - \frac{1}{2}\int dx + \int \cos 4x\,dx * \frac{4}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int dx - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x \cdot 4\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right] + c$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$= \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

Reducing an improper fraction — طريقة القسمة الطويلة

* تستخدم هذه الطريقة عندما تكون الدالة كسرية ودرجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام

* نتوقف عن القسمة عندما يكون المتبقي عدد ثابت أو متغير يحمل أس أقل من أس المقسوم عليه.

* في النهاية نطبق القانون التالي

$$\text{الناتج} \pm \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

ex.1 $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

Sol

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2+1 & x^2 \\ & \mp x^2 \mp 1 \\ \hline & -1 \end{array}$$

$$\therefore \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \tan^{-1} x + c$$

ملاحظة حفظ

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1}$$

Ex-2

$$\int \frac{x^3-3x^2-4x+12}{x-3}$$

Sol

$$\int \left((x^2-4)+\frac{0}{x-3}\right)dx$$

$$= \int (x^2-4)\,dx$$

$$= \int x^2\,dx - 4\int dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 4x + c$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2-4 \\ x-3 & x^3-3x^2-4x+12 \\ & \mp x^3 \pm 3x^2 \\ \hline & -4x+12 \\ & -4x+12 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ex-3

$$\int \frac{4x^2-7}{2x+3}\,dx$$

Sol

$$\int (2x-3)\,dx + 2\int \frac{dx}{2x+3} * \frac{2}{2}$$

$$= \int 2x\,dx - 3\int dx + \frac{2}{2}\int \left(\frac{dx}{2x+3}\right)\cdot 2\,dx$$

$$= 2 * \frac{x^2}{2} - 3x + \ln(2x+3) + c$$

$$\begin{array}{r|l} & 2x-3 \\ 2x+3 & 4x^2-7 \\ & \mp 4x^2 \mp 6x \\ \hline & -6x-7 \\ & \pm 6x \pm 9 \\ \hline & 2 \end{array}$$

ex-4

$$\int \frac{(x-2)^3}{x^2-4}\,dx$$

Sol

$$= \int \frac{(x-2)^2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}\,dx = \int \frac{(x-2)^2}{(x+2)}\,dx$$

$$= \int \frac{x^2-4x+4}{(x+2)}$$

$$\begin{array}{r|l} & x-6 \\ \hline x+2 & x^2-4x+4 \\ & \mp x^2 \mp 2x \\ \hline & -6x+4 \\ & \pm 6x \pm 12 \\ \hline & 16 \end{array}$$

$$= \int \left[(x-6) + \frac{16}{x+2}\right] dx$$

$$= \int x\,dx - 6\int dx + 16\int \frac{dx}{(x+2)}$$

$$= \frac{x^2}{2} - 6x + 16\ln(x+2) + c$$

Rational function

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون الدالة كسرية ودرجة البسط اقل من درجة المقام وعندما تكون المقام معادلة تربيعية فلحل الكسر نستعين بطريقة التجربة وخطوات هذه الطريقة موضحة في السؤال التالي

ex.1 Evaluate $\int \frac{5x-7}{x^2-3x+2}$

Sol

$$\int \frac{5x-7}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-1)}$$

(نقوم باخراج العامل المشترك للدالة المفروضة)

$$= \frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{Ax-A+Bx-2B}{(x-2)(x-1)}$$

$$= \frac{x(A+B)-A-2B}{(x-2)(x-1)}$$

* (بسط الدالة الأصلية = بسط الدالة المفروضة)

$$(A+B)x - A - 2B = 5x - 7$$

* معامل (x) في الدالة الأصلية = معامل (x) في الدالة المفروضة.

$A+B=5 \quad \ldots\ldots (1)$

الحد المطلق في الدالة الأصلية = معامل الحد المطلق في الدالة المفروضة

$-A-2B=-7 \quad \ldots\ldots (2)$

$A+B=5 \quad \text{---} (1)$

$-A-2B=-7 \quad \text{---} (2)$

$-B=-2 \Longrightarrow B=2$

نعوض قيمة (B) في احدى المعادلتين

$$A + 2 = 5 \quad \text{--①} \Longrightarrow A = 3$$

نعوض عن التكامل على الدالة المجزوءة

$$= \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-1} = \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx$$

$$= 3\ln(x-2) + 2\ln(x-1) + c$$

ملاحظة :- عند وجود في الدالة الأصلية (قوس)^n في المقام فإننا نشكله بشكل تتابعي أي .

$$= \frac{A}{(\text{قوس})^1} + \frac{B}{(\text{قوس})^2} + \frac{C}{(\text{قوس})^3} \text{---}$$

ex 2 $\displaystyle \int \frac{x^2\,dx}{(x-1)(x+1)^2}$

sol

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$= \frac{A(x^2+2x+1) + B(x^2 + \cancel{x} - \cancel{x} - 1) + Cx - C}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$= \frac{Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 - B + Cx - C}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2(A+B) + x(2A+C) + A - B - C}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$A + B = 1 \quad \text{----} \quad (1)$$

$$2A + C = 0 \quad \text{----} \quad (2)$$

$$A - B - C = 0 \quad \text{----} \quad (3)$$

وحل ③ ، ② آنيا

$$2A + C = 0 \quad \text{----} \quad (2)$$

$$A - B - C = \quad \text{----} \quad (3)$$

$$3A - B = 0 \quad \text{----} \quad (4)$$

وحل ④ مع ① آنيا

$$3A - B = 0 \quad \text{----} \quad (4)$$

$$A + B = 1 \quad \text{----} \quad (1)$$

$$4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{4} + B = 1 \quad \text{في } (1) \Rightarrow B = \frac{3}{4}$$

$$\therefore 2A + C = 0 \quad \text{----} \quad (2) \Rightarrow 2 \times \frac{1}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{-1}{2}$$

(نعوض عن التكامل
بحل الـ NF المفروض)

$$= \int \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)} dx + \int \frac{\frac{3}{4}}{(x+1)} dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{(x+1)^2} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \ln(x-1) + \frac{3}{4} \ln(x+1) - \frac{1}{2} * \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C$$

نصعد الاس ونقسم على
الاس الجديد

$$= \frac{1}{4} \ln(x-1) + \frac{3}{4} \ln(x+1) + \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + C$$

ex.3 $\displaystyle\int \frac{x^2-7}{x^3-2x^2-3x}\,dx$

<u>Sol</u>

$$\int \frac{x^2-7}{x(x^2-2x-3)}\,dx = \int \frac{x^2-7}{x(x-3)(x+1)}\,dx$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x+1)}$$

$$= \frac{A(x-3)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-3)}{x(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{A(x^2+x-3x-3) + Bx^2 + Bx + Cx^2 - 3Cx}{x(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{Ax^2 - 2Ax - 3A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - 3Cx}{x(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2(A+B+C) + x(-2A+B-3C) - 3A}{x(x-3)(x+1)}$$

$A + B + C = 1$ ---- ①

$-2A + B - 3C = 0$ ---- ②

$\Rightarrow -3A = -7 \Rightarrow A = \frac{7}{3}$

بطرح ① من ② نجد:

$A + B + C = 1$ ---- ①

$\pm 2A \mp B \pm 3C = 0$ ---- ②

$3A + 4C = 1 \Rightarrow$

$3 * \frac{7}{3} + 4C = 1$

$4C = -6 \Rightarrow C = \frac{-6}{4} = \boxed{\frac{-3}{2}}$

نعوض A و C في معادلة ①

$\frac{7}{3} + B - \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow B = 1 + \frac{3}{2} - \frac{7}{3} = 1 + \frac{9-14}{6} =$

$1 + \frac{-5}{6} = \frac{6-5}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$

$= \int \frac{\frac{7}{3}}{x} dx + \int \frac{\frac{1}{6}}{(x-3)} dx + \int \frac{-\frac{3}{2}}{(x+1)} dx$

$= \frac{7}{3} \int x^{-1} dx + \frac{1}{6} \int (x-3)^{-1} dx - \frac{3}{2} \int (x+1)^{-1} dx$

$= \frac{7}{3} \ln(x) + \frac{1}{6} \ln(x-3) - \frac{3}{2} \ln(x+1) + c$