الفصل الثاني

اساليب المحاكاة

SIMULATION METHODS

أساليب المحاكاة:

هنالك اسلوبان من المحاكاة:

١. طريقة التناظر **(Analogue Method)**.

٢. طريقة مونت كارلو **(Monte Carlo Method)**.

١. طريقة التناظر Analogue Method :

في هذه الطريقة يتم تحويل المشكلة قيد الدارسة المطلوب محاكاتها الي مناظر لها بحيث تكون معالجته سهلة والمناظر التقليدي الاكثر استخداما هو الدوائر الكهربية وذلك بتحويل المشكله المراد محاكاتها الي دائرة كهربائية مناظرة بعد تغيير معالم وقواعد القرارات فهذه الطريقة لا تتعامل مع النماذج الرياضية لذا تطبق في المشاكل ذات المتغيرات الكثيرة العدد الي الحد الذي يصعب معه الحل بالطرق العادية. هذه الطريقة محددة التطبيق.

٢. طريقة مونت كارلو Monte Carlo Method :

تستخدم هذه الطريقة لمعالجة مختلف انواع المسائل التي تتخللها عمليات عشوائية حيث يصعب عمل تجارب طبيعية يصعب حلها بواسطة الاساليب الرياضية. تعتمد هذه الطريقة على المحاكاة بواسطة اسلوب العينة وذلك بايجاد عينات من مجتمع نظري يحاكي المجتمع الحقيقي بدلا من اخذ العينات من المجتمع الحقيقي نفسه.

الخطوات المتبعة لمحاكاة مونت كارلو:

١. تحديد نوع التوزيع الاحتمالي للمتغير قيد الدراسة.

٢. إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية.

٣. انشاء فترة الاعداد العشوائية لكل متغير.

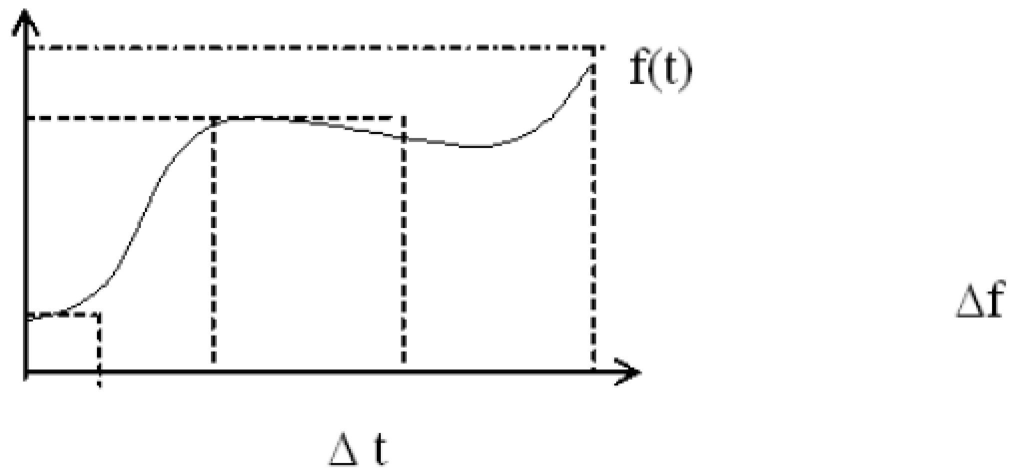
٤. تكوين الاعداد العشوائية.

٥. اجراء سلسلة من محاولات المحاكاة.

تتضمن هذه الطريقة نوعين من التوزيعات مصنفة وفقا لطبيعة متغيراتها:

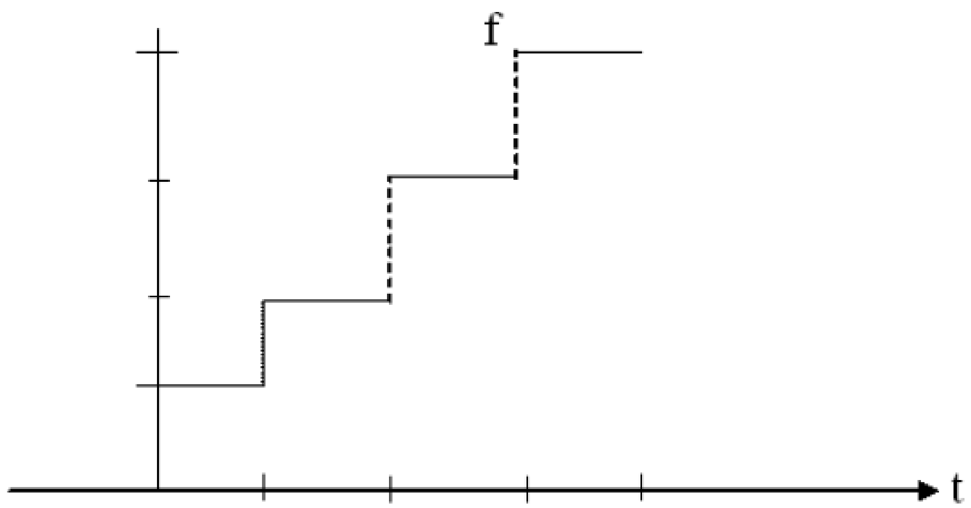
١- **التوزيع المتصل (Contiguous Distribution)**

يشمل التوزيع الطبيعي والتوزيع الأسى والتوزيع المنتظم وغيرها بحيث يكون المتغير t محصور بين قيمتين $T_1 \leq t \leq T_2$. الرسم يوضح دالة توزيع متصلة f(t):



٢- **التوزيع المتقطع (Discrete Distribution)**

يشمل هذا النوع من التوزيع توزيع برنولى وذي الحدين وبواسون وغيره . متغير هذا النوع يأخذ قيم محددة حيث تتغير قيمته بمقدارعند نقطة معينة كما يوضحه الرسم التالى :



نجد أكثر أنواع المحاكاة تستخدم للحوادث المتقطعة وذلك لكثرة الظواهر التي تلائمها .

توليد الاعداد العشوائية Generation of Random Numbers

بما أن محاكاة مونت كارلو تعتمد علي الاعداد العشوائية لذا سنتناول الطرق المختلفة التي يتم بها توليد الاعداد العشوائية والرقم العشوائي هو الرقم الذي يكون احتمال وقوعه مساو لاحتمال وقوع اي رقم عشوائي آخر من مجموعة اعداد عشوائية حيث تتبع الاعداد العشوائية

التوزيع المنتظم القياسي [0,1] هذا لان الاعداد العشوائية المولدة بواسطة الآلات الإلكترونية تقع داخل الفترة [0,1] حيث نماذج المحاكاة المعتمدة على الاعداد العشوائية التي تنفذ بواسطة الحاسب .

يتم توليد الاعداد العشوائية عن طريق :

- ☒ جداول القيم العشوائية التي يتم تخزينها مباشرة فى ذاكرة الحاسب وهذه طريقة غير مجدية نسبة لحجز حيز كبير فى ذاكرة الحاسب .
- ☒ عمليات حسابية تعد لتنفذ بواسطة الحاسب، تتم المفاضلة بين كل عملية واخرى وفقا للاتى:
  - يجب ان تتبع الاعداد العشوائية المولدة التوزيع المنتظم U(0,1).
  - يجب ان تكون دورة الاعداد العشوائية مستقلة إحصائيا .
  - يجب ان تكون دورة الاعداد العشوائية طويلة .
  - سرعة عملية توليد الاعداد العشوائية

تشتمل طرق العمليات الحسابية على عدة اساليب :

١. طريقة وسط مربع العدد (Mid-Square Method) :

٢. طريقة وسط ضرب العدد (Mid-Product method) :

٣. طريقة باقي القسمة (المطابقة) Congruential :

٤. طريقة المعاينة من التوزيعات الاحتمالية Sampling From Probability Distributions Method:

تشمل طريقة المعاينة من التوزيعات الاحتمالية على طرق تقوم بتوليد عينات عشوائية متتالية $(t_1,t_2 \ldots)$ من توزيع احتمالى f(t)

• كل هذه الطرق أسست على استخدام اعداد عشوائية ذات توزيع منتظم قياسي Independent and identically distributed uniform (0,1) .

من هذه الطرق :

١- طريقة المعكوس Inverse Method

٢- طريقة التجميع Convolution Method

طريقة المعكوس Inverse Method

- هي طريقة يتم بموجبها الحصول على متغير عشوائي يتبع توزيعاً معينا لتوليد اعداد عشوائية تتبع ذلك التوزيع وذلك بالاعتماد على الاعداد العشوائية التي تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم القياسي .

• افترض أننا نريد ان نحصل على عينة عشوائية من دالة توزيع احتمالية $f(x)$ سواء كان التوزيع متصل او متقطع . فطريقة المعكوس تقوم أولا بإيجاد دالة الكثافة التراكمية $F(x)=P\{y\le x\}$ حيث $0\le F(x)\le 1$ لكل قيم y المعرفة ثم نقوم بالخطوات التالية :

١- توليد اعداد عشوائية R من التوزيع المنتظم القياس $U(0,1)$.

٢- حساب او أيجاد قيمة x المرادة من $x = F^{-1}(R)$.

خوار زمية إيجاد قيم لتوزيع احتمالي متقطع باستعمال طريقة المعكوس:

١. لتكن لدينا n من القيم: $x_1,x_2,\ldots,x_n$ باحتمالية $p_1,p_2,\ldots,p_n$ على التوالي، بحيث ان $0\le p_i\le 1$ وان $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

٢. نوجد الدالة التراكمية F_i من خلال:

$F_1=p_1;$
$F_2=p_1+p_2;$
:
$F_n=p_1+p_2+\ldots+p_n=\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

٣. نختار عدد عشوائي $R_i\in[0,1]$ ونبحث عن الفترة $[F_{i-1},F_i]$ التي يقع فيها بحيث ان $F_{i-1}<R_i\le F_i$.

٤. نلاحظ ان :

x_1 if $0<R_1\le F_1$
x_2 if $F_1<R_2\le F_2$
:
x_n if $F_{n-1}<R_n\le F_n$.

مثال ١:

ليكن لدينا التوزيع المعبر عن الفترة الزمنية الفاصلة بين تعطيل الالات في مصنع ما ل $n=1,2,3,4$ كما يلي:

n	p(t_i)	t_i
1	0.12	4
2	0.48	5
3	0.22	6
4	0.18	7

اوجد 10 اعداد عشوائية من نوع t_i:

الحل:

نولد (نختار) اعداد عشوائية R_i فكانت **الاعداد** التالية:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.4764	0.8416	0.9434	0.3420	0.6827	0.8521	0.1129	0.5806	0.9285	0.6955

نأخذ رقم من الاعداد العشوائية R_i بصورة متتابعة وننظر في فترة يقع لكي نحدد القيمة العشوائية المطلوبة، حيث ان:

n	$p(t_i)$	F_i	F_{i-1}-F_i
1	0.12	0.12	0.0000-0.1200
2	0.48	0.60	0.1201-0.6000
3	0.22	0.82	0.6001-0.8200
4	0.18	1.00	0.8201-1.0000

فمثلا اول قيمة عشوائية هي $R_1=0.4764$ نلاحظ انها تقع $0.1201<R_1\leq 0.6$ وعليه فاننا نختار $t_i=5$. وعليه فاننا نحصل على الجدول التالي:

i	R_i	F_{i-1}-F_i	t_i
1	0.4764	0.2021-0.6000	5
2	0.8416	0.8201-1.0000	7
3	0.9434	0.8201-1.0000	7
4	0.3420	0.2021-0.6000	5
5	0.6827	0.6001-0.8200	6
6	0.8521	0.8201-1.0000	7
7	0.1129	0.2021-0.6000	5
8	0.5806	0.2021-0.6000	5
9	0.9285	0.8201-1.0000	7
10	0.6955	0.6001-0.8200	6

توليد الاعداد العشوائية بطريقة المطابقة (Congruential)

١. المطابقة الخطية (Linear Congruential)

ليكن لدينا العلاقة الخطية التالية:

$x_i=(a.x_{i-1}+b) \bmod P, i=1,2,\ldots$

حيث ان x_0, a , b تمثل قيم ابتدائية و P عدد اولي و k=3 or 4 وهذه تمثل عدد المراتب و L تمثل عدد الاعداد المراد توليدها. فاننا نستطيع توليد قيم عشوائية باستخدام الخوارزمية التالية:

Linear Congruential Algorithm (LCA)

Step (1): Input: x_0, a , b, P, k, L
Step(2): Process:
    For i=1 : L
        $x_i=(a.x_{i-1}+b) \bmod P$.
        $R_i=x_i/10^k$.
    End.
Step(3): Output the sequence $R_1,R_2,\ldots,R_L$.
END.

مثال (٢): ليكن لدينا $x_0=500$ و b=7 و a=5 و P=997. المطلوب توليد 3 اعداد عشوائية ونختار k=3.

الحل:

1. $x_1=(a*x_0+b) \bmod P$.
   $x_1=(5*500+7) \bmod 997=2507 \bmod 997$, let $q=2507\backslash 997=2$.
   $x_1=2507-2*997=513$.
   $R_1=513/1000=0.513$.
2. $x_2=(5*513+7) \bmod 997=2572 \bmod 997$, let $q=2572\backslash 997=2$.
   $x_2=2572-2*997=578$.
   $R_2=578/1000=0.578$.
3. $x_3=(5*578+7) \bmod 997=2897 \bmod 997$, let $q=2897\backslash 997=2$.
   $x_3=2897-2*997=903$.
   $R_3=903/1000=0.903$.

وعليه فان الاعداد العشوائية هي :0.513, 0.578, 0.903.

٢. المطابقة التربيعية (Quadratic Congruential)

ليكن لدينا العلاقة التربيعية التالية:

$x_i=(a.x^2_{i-2}+ b.x_{i-1}+c) \bmod P, i=1,2,\ldots$

حيث ان x_0, a , b تمثل قيم ابتدائية و P عدد اولي و k=3 or 4 وهذه تمثل عدد المراتب و L تمثل عدد الاعداد المراد توليدها. فاننا نستطيع توليد قيم عشوائية باستخدام الخوارزمية التالية:

<u>Quadratic Congruential Algorithm (QCA)</u>

Step (1): Input: x_{-1}, x_0, a , b, c, P, k, L
Step(2): Process:
    For i=1 : L
        $x_i=(a.x^2_{i-2}+ b.x_{i-1}+c) \bmod P$.
        $R_i=x_i/10^k$.
    End.
Step(3): Output the sequence $R_1,R_2,\ldots,R_L$.
END.

<u>مثال (٣)</u>: ليكن لدينا $x_0=19$ و $x_{-1}=11$ و $c=31$ و $b=23$ و $a=13$ و P=997. المطلوب توليد 3 اعداد عشوائية ونختار k=3.

الحل:

1. $x_1=(a.x^2_{-1}+ b.x_0+c) \bmod P$.
   $x_1=(13*11^2+23*19+31) \bmod 997=2041 \bmod 997$, $q=2041\backslash 997=2$.
   $x_1=2041-2*997=47$.
   $R_1=47/1000=0.047$.
2. $x_2=(13*19^2+23*47+31) \bmod 997=5805 \bmod 997$, $q=5805\backslash 997=5$.
   $x_2=5805-5*997=820$.
   $R_2=820/1000=0.820$.
3. $x_3=(13*47^2+23*820+31) \bmod 997=25027 \bmod 997$, $q=25027\backslash 997=25$.
   $x_3=25027-25*997=102$.
   $R_3=820/1000=0.102$.

وعليه فان الاعداد العشوائية هي : 0.047, 0.820, 0.102.

٢. الدوال الفوضوية chaotic Functions

وهي عبارة عن دالة او اكثر (نظام معادلات) يمكن الاستفادة منها في توليد اعداد عشوائية R_i ، وقد تكون هذه الدوال او العلاقات الرياضية خطية او غير خطية او دوال مثلثية او دوال اسية لمتغير او اكثر.

مثال

ليكن لدينا نظام المعادلات التالية:

$$x_i = (a x_{i-1} + b y_{i-1} + c) \bmod P$$

$$y_i = b x_i + c y_{i-1} + d) \bmod P$$

$$R_i = y_i / 10^K$$

حيث ان $K=3$, $P=997$, $C=7$, $b=3$, $a=5$

$y_0 = 13$ ، $x_0 = 11$

$i=1$, $x_1 = (5*11 + 3*13 + 7) \bmod 997 = 101$

$y_1 = (3*101 + 7*13 + 5) \bmod 997 = 399$

$R_1 = 0.399$

$i=2$, $x_2 = (5*101 + 3*399 + 7) \bmod 997 = 712$

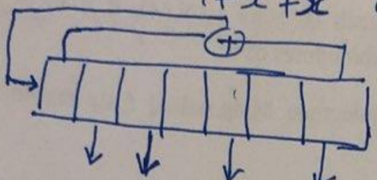
$y_2 = (3*712 + 7*399 + 5) \bmod 997 = 946$

$R_2 = 0.946$

:

٤) طريقة المسجل الزاحف

ليكن لدينا المسجل الزاحف التالي $1+x+x^7$

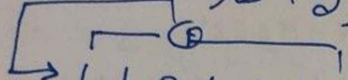


يحوي قيم ابتدائية $a_1, a_2, \dots, a_7$

قيم ثنائية

نأخذ قيم عشوائية من عدد من المواقع

مثلاً (4) مواقع تؤخذ بعد الحركة مثلاً



نأخذ من المواقع 2، 3، 5، 7 1101110

1110111

① $t_1 = 1\times8 + 1\times4 + 1\times2 + 1\times1 = 15 \bmod 10 = 5$

② 0111011

$t_2 = 1\times8 + 1\times4 + 0\times2 + 1\times1 = 13 \bmod 10 = 3$

③ 1011101

$t_3 = 0\times8 + 1\times4 + 1\times2 + 1\times1 = 7 \bmod 10 = 7$

وهكذا فان الاعداد العشوائية المولدة هي :

$t_i = 5, 3, 7, \dots$

تمارين

١. استخدم خورازمية LCA لتوليد الاعداد العشوائية لحل المثال ١.

٢. استخدم خورازمية QCA لتوليد الاعداد العشوائية لحل المثال ١.

٣. حل المثال الاول اذا كان $n=8$ وباحتمالية متساوية لتوليد الاعداد $t_i=2,\ldots,9$ باستخدام LCA.

٤. استخدم الدوال الفوضوية لتوليد الاعداد العشوائية بالاعتماد على المدخلات التالية:

x0=123, a=17 , b=21 , P=10007, k=4; L=5;

٥. استخدم المسجل الزاحف لتوليد الاعداد العشوائية بالاعتماد على المدخلات التالية:

SR = [1 1 0 1 1 1 0]; a=5; b=7; L=5; P=[2 4 5 6];