المحاكاة
Simulation

فرع الاحصاء وبحوث العمليات / المرحلة الرابعة

العام الدراسي ٢٠١٩/٢٠٢٠

الفصل الدراسي الثاني

اعداد التدريسي: د.فائز حسن علي

الفصل الثاني - المحاضرة الثانية

طرق توليد الاعداد العشوائية

Generating Random Numbers Methods

طريقة المعكوس Inverse Method

هي طريقة يتم بموجبها الحصول على متغير عشوائي يتبع توزيعاً معينا لتوليد اعداد عشوائية تتبع ذلك التوزيع وذلك بالاعتماد على الاعداد العشوائية التي تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم القياسي .

افترض أننا نريد ان نحصل على عينة عشوائية من دالة توزيع احتمالية $f(x)$ سواء كان التوزيع متصل او متقطع .فطريقة المعكوس تقوم أولا بإيجاد دالة الكثافة التراكمية $F(x)=P\{y\leq x\}$ حيث $0\leq F(x)\leq 1$ لكل قيم y المعرفة ثم نقوم بالخطوات التالية :

١ -توليد اعداد عشوائية R من التوزيع المنتظم القياسي $U(0,1)$.

٢ -حساب او أيجاد قيمة x معكوس الدالة $x = F^{-1}(R)$.

طريقة المعكوس Inverse Method

خوار زمية إيجاد قيم لتوزيع احتمالي متقطع باستعمال طريقة المعكوس:

١. لتكن لدينا n من القيم: $x_1,x_2,\ldots,x_n$ باحتمالية $p_1,p_2,\ldots,p_n$ على التوالي، بحيث ان $0\le p_i\le 1$ وان $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

٢. نوجد الدالة التراكمية F_i من خلال:

$F_1=p_1;$

$F_2=p_1+p_2;$

:

$F_n=p_1+p_2+\ldots+p_n=\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

٣. نختار عدد عشوائي $R_i\in[0,1]$ ونبحث عن الفترة $[F_{i-1},F_i]$ التي يقع فيها بحيث ان $F_{i-1}<R_i\le F_i$.

٤. نلاحظ اننا سنختار :

x_1 if $0<R_1\le F_1$

x_2 if $F_1<R_2\le F_2$

:

x_n if $F_{n-1}<R_n\le F_n$.

طريقة المعكوس Inverse Method

مثال ١: ليكن لدينا التوزيع المعبر عن الفترة الزمنية الفاصلة بين تعطيل الالات في مصنع ما ل n=1,2,3,4 كما يلي:

n	$p(t_i)$	t_i
1	0.12	4
2	0.48	5
3	0.22	6
4	0.18	7

اوجد ١٠ اعداد عشوائية من نوع ti:

الحل:

نولد (نختار) اعداد عشوائية Ri فكانت الاعداد التالية:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.4764	0.8416	0.9434	0.3420	0.6827	0.8521	0.1129	0.5806	0.9285	0.6955

نبني الجدول التراكمي التالي:

n	$p(t_i)$	F_i	F_{i-1}-F_i
1	0.12	0.12	0.0000-0.1200
2	0.48	0.60	0.1201-0.6000
3	0.22	0.82	0.6001-0.8200
4	0.18	1.00	0.8201-1.0000

Inverse Method طريقة المعكوس

نأخذ عدد من الاعداد
العشوائية R_i بصورة متتابعة
وننظر في اي فترة يقع لكي
نحدد القيمة العشوائية
المطلوبة، فمثلا اول قيمة
عشوائية هي $R_1=0.4764$
نلاحظ انها تقع
$0.1201<R_1\le 0.6$ وعليه
فاننا نختار $t_i=5$. وعليه فاننا
نحصل على الجدول التالي:

i	R_i	$F_{i-1}-F_i$	t_i
1	0.4764	0.2021-0.6000	5
2	0.8416	0.8201-1.0000	7
3	0.9434	0.8201-1.0000	7
4	0.3420	0.2021-0.6000	5
5	0.6827	0.6001-0.8200	6
6	0.8521	0.8201-1.0000	7
7	0.1129	0.2021-0.6000	5
8	0.5806	0.2021-0.6000	5
9	0.9285	0.8201-1.0000	7
10	0.6955	0.6001-0.8200	6

توليد الاعداد العشوائية بطريقة المطابقة
Linear Congruential

١. **المطابقة الخطية (Linear Congruential)**: ليكن لدينا العلاقة الخطية التالية:

$$x_i=(a.x_{i-1}+b) \bmod P, \; i=1,2,\ldots$$

حيث ان x_0, a , b تمثل قيم ابتدائية و P عدد اولي و k=3 or 4 وهذه تمثل عدد المراتب و L تمثل عدد الاعداد المراد توليدها. فاننا نستطيع توليد قيم عشوائية باستخدام الخوارزمية التالية:

Linear Congruential Algorithm (LCA)

Step (1): Input: x_0, a , b, P, k, L

Step(2): Process:

For i=1 : L

$x_i=(a.x_{i-1}+b) \bmod P$.

$R_i=x_i/10^k$.

End.

Step(3): Output the sequence $R_1,R_2,\ldots,R_L$.

END.

توليد الاعداد العشوائية بطريقة المطابقة الخطية

Linear Congruential

مثال (٢): ليكن لدينا $x_0=500$ و $b=7$ و $a=5$ و $P=997$. المطلوب توليد 3 اعداد عشوائية بطريقة LCA لنختار $k=3$.

الحل:

$x_1=(a*x_0+b) \bmod P.$

$x_1=(5*500+7) \bmod 997=2507 \bmod 997,\ q=2507\backslash 997=2.$

$x_1=2507-2*997=513,\ R_1=513/1000=0.513.$

$x_2=(5*513+7) \bmod 997=2572 \bmod 997,\ q=2572\backslash 997=2.$

$x_2=2572-2*997=578,\ R_2=578/1000=0.578.$

$x_3=(5*578+7) \bmod 997=2897 \bmod 997,\ q=2897\backslash 997=2.$

$x_3=2897-2*997=903,\ R_3=903/1000=0.903.$

:

وعليه فان الاعداد العشوائية هي:

0.513, 0.578, 0.903.

توليد الاعداد العشوائية بطريقة المطابقة التربيعية

Quadratic Congruential

<u>٢. المطابقة التربيعية (Quadratic Congruential):</u> ليكن لدينا العلاقة التربيعية التالية:

$$x_i=(a.x^2_{i-2}+ b.x_{i-1}+c) \bmod P, \; i=1,2,\ldots$$

حيث ان x_0, x_{-1}, a , b, c تمثل قيم ابتدائية وP عدد اولي و $k=3$ or 4 تمثل عدد المراتب و L تمثل عدد الاعداد المراد توليدها. فنستطيع توليد قيم عشوائية باستخدام الخوارزمية:

<u>Quadratic Congruential Algorithm (QCA)</u>

Step (1): Input: x_{-1}, x_0, a , b, c, P, k, L

Step(2): Process:

For i=1 : L

$x_i=(a.x^2_{i-2}+ b.x_{i-1}+c) \bmod P.$

$R_i=x_i/10^k.$

End.

Step(3): Output the sequence $R_1,R_2,\ldots,R_L$.

END.

توليد الاعداد العشوائية بطريقة المطابقة

Quadratic Congruential

<u>مثال (٣)</u>: ليكن لدينا $x_0=19$ و $x_{-1}=11$ و $c=31$ و $b=23$ و $a=13$ و $P=997$. المطلوب توليد 3 أعداد عشوائية باستخدام خوارزمية QCA لنختار $k=3$.

الحل:

$x_1=(\ a.x^2_{-1}+b.x_0+c)\ \text{mod}\ P.$

$x_1=(13*11^2+23*19+31)\ \text{mod}\ 997=2041\ \text{mod}\ 997,\ q=2041\backslash 997=2.$

$x_1=2041-2*997=47,\ R_1=47/1000=0.047.$

$x_2=(13*19^2+23*47+31)\ \text{mod}\ 997=5805\ \text{mod}\ 997,\ q=5805\backslash 997=5.$

$x_2=5805-5*997=820,\ R_2=820/1000=0.820.$

$x_3=(13*47^2+23*820+31)\ \text{mod}\ 997=25027\ \text{mod}\ 997,$
$q=25027\backslash 997=25.$

$x_3=25027-25*997=102,\ R_3=820/1000=0.102.$

وعليه فان الاعداد العشوائية هي :

.0.047, 0.820, 0.102