Integration التكامل

Indefinite integration التكامل غير المحدد

definite integration التكامل المحدد

① Indefinite integration: التكامل غير المحدد

Rules of indefinite integration قوانين التكامل الغير محدد.

① $\int dx = x + c$

② $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$

③ $\int (f(x))^n \cdot f'(x)\, dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$

④ $\int (f(x) \mp g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \mp \int g(x)\, dx$

⑤ $\int k \cdot f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$; k is Constant.

---

* في القاعدة رقم (3) هي تكامل دالة الدالة والتي تعني انها كل اس مادا $[f(x)]^{(-1)}$ ففي تكاملها يجب توفر مشتقة داخل القوس وبعدها تحذف المشتقة وتكامل بإضافة (1) للأس والقسمة على الأس الجديد.

ex 1) find $\int 3x^2\,dx$

Sol $= 3\int x^2\,dx = 3 * \frac{x^3}{3} + c$

$= x^3 + c$

ex 2) $\int \left(\frac{1}{x^2} + x\right) dx$

Sol $\int \frac{1}{x^2}\,dx + \int x\,dx = \int x^{-2}\,dx + \int x\,dx$

$= \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{2} + c = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + c$

ex. 3) $\int x \cdot \sqrt{x^2+1}\,dx$

Sol $= \int (x^2+1)^{1/2} \cdot x\,dx \quad * \frac{2}{2}$

$= \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{1/2} \cdot 2x\,dx$

$= \frac{1}{2} * \frac{(x^2+1)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{2} * \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}$

$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + c$

ex. 4) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx$

Sol $\int (1+\sqrt{x}) * \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \quad * \frac{2}{2} = \int (1+\sqrt{x}) \frac{2}{2\sqrt{x}} \cdot dx$

$= 2\int (1+\sqrt{x}) * \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$= 2 * \frac{(1+\sqrt{x})^2}{2} + c = (1+\sqrt{x})^2 + c$

ex.5 $\int (3t + t^{-3})^2 \, dt$

Sol $\int (9t^2 + 6t^{-2} + t^{-6}) \, dt$

$= 9\int t^2 dt + 6\int t^{-2} dt + \int t^{-6} dt$

$= 9 * \frac{t^3}{3} + 6 * \frac{t^{-1}}{-1} + \frac{t^{-5}}{-5} + c$

$= 3t^3 - \frac{6}{t} - \frac{t^{-5}}{5} + c$

ex.6 $\int \left(\frac{x}{3x^2+4}\right)^2 \frac{dx}{x}$

Sol $\int \frac{x^{2x}}{(3x^2+4)^2} * \frac{dx}{x} = \int (3x^2+4)^{-2} \cdot x \, dx \quad * \frac{6}{6}$

$= \frac{1}{6}\int (3x^2+4)^{-2} \, 6x \, dx = \frac{1}{6} * \frac{(3x^2+4)^{-1}}{-1} + c$ [تكامل الدالة]

$= \frac{-1}{6(3x^2+4)} + c$

ex.7 $\int \sqrt{x^2 - x^4} \, dx$

Sol $\int \sqrt{x^2(1-x^2)} \, dx = \int x \cdot \sqrt{1-x^2} \, dx$

$= \int (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot x \, dx \quad * \frac{-2}{-2} = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (-2x) dx$

$= -\frac{1}{2} * \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{2} * \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + c$

$= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + c$

تكامل الدوال المثلثية

① $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

② $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

③ $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

④ $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$

⑤ $\int \sec x \cdot \tan x\,dx = \sec x + c$

⑥ $\int \csc x \cdot \cot x\,dx = -\csc x + c$

ملاحظة: في جميع الدوال المثلثية يجب توفر مشتقة الزاوية في تكامل.

ex.1 $\int \cos(7x+1)\,dx$

sol

$\int \cos(7x+1)\,dx \times \frac{7}{7}$

$= \frac{1}{7}\int \cos(7x+1)\cdot 7\,dx = \frac{1}{7}\sin(7x+1) + c$

ex.2 $\int x \cdot \sin(2x^2)\,dx$

sol

$\int \sin(2x^2)\cdot x \times \frac{4}{4}\,dx$

$= \frac{1}{4}\int \sin(2x^2)\cdot 4x\,dx$

$= -\frac{1}{4}\cos(2x^2) + c$

ex. 3 $\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos(x)}$

$\sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

Sol $\int \sec^2\theta \, d\theta = \tan\theta + c$

ex. 4

$\int \cos^2 2x \cdot \sin 2x \, dx$

Sol $\int \cos^2 2x \cdot \sin 2x \, dx \times \frac{-2}{-2}$ [الاس والمشتقة]

$= -\frac{1}{2}\int \cos^2 2x \cdot -2\sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} \times \frac{\cos^3 2x}{3} + c$

$= -\frac{1}{6}\cos^3 2x + c$

ex. 5

$\int \sec^3 x \cdot \tan x \, dx$

Sol $\int \sec^2 x \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx$

(الاس الاكبر)

$= \frac{\sec^3 x}{3} + c$

ex. 6 $\int \sqrt{2 + \sin 3t} \cdot \cos 3t \, dt.$

Sol $\int (2+\sin 3t)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos 3t \, dt \times \frac{3}{3}$

$= \frac{1}{3}\int (2+\sin 3t)^{\frac{1}{2}} \cdot 3\cos 3t \, dt.$

$= \frac{1}{3} \times \frac{(2+\sin 3t)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}(2+\sin 3t)^{3/2} + c$

$= \frac{2}{9}(2+\sin 3t)^{3/2} + c$