Rational Function

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون الدالة كسرية ودرجة البسط اقل من درجة المقام وعندما تكون المقام معادلة تربيعية قابل الى قسمين بطريقة التجربة وخطوات هذه الطريقة موضحة في السؤال التالي

Ex.1 Evaluate $\int \frac{5x-7}{x^2-3x+2}$

Sol

$$\int \frac{5x-7}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-1)}$$

(نقوم باخراج العامل المشترك للدالة المعروضة)

$$= \frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{Ax-A+Bx-2B}{(x-2)(x-1)}$$

$$= \frac{x(A+B)-A-2B}{(x-2)(x-1)}$$

* (بسط الدالة الأصلية = بسط الدالة المعروضة)

$$(A+B)x-A-2B = 5x-7$$

* معامل (x) في الدالة الأصلية = معامل (x) في الدالة المعروضة.

$$A+B = 5 \quad \cdots\cdots (1)$$

الحد المطلق في الدالة الأصلية = معامل الحد المطلق في الدالة المعروضة

$$-A-2B = -7 \quad \cdots\cdots (2)$$

$$A+B = 5 \quad \cdots (1)$$

$$-A-2B = -7 \quad \cdots (2)$$

3/ $-B = -2 \Rightarrow B = 2$

REDMI NOTE 9 PRO
AI QUAD CAMERA

نعوض قيمة (B) في احدى المعادلتين

$A+2=5 \quad \text{---} (1) \Longrightarrow A=3$

نعوض في التكامل على الدالة المطلوبة

$$= \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-1} = \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx$$

$$= 3\ln(x-2) + 2\ln(x-1) + c$$

ملاحظة:- عند وجود في الدالة الأصلية (مقام^n) في المقام نأتي نفكك بشكل تتابعي كما يلي.

$$= \frac{A}{(\text{مقام})^1} + \frac{B}{(\text{مقام})^2} + \frac{C}{(\text{مقام})^3} \cdots$$

ex 2 $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)(x+1)^2}$

Sol

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$= \frac{A(x^2+2x+1) + B(x^2+x-x-1) + Cx - C}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$= \frac{Ax^2+2Ax+A+Bx^2-B+Cx-C}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2(A+B) + x(2A+C) + A-B-C}{(x-1)(x+1)^2}$$

REDMI NOTE 9 PRO
AI QUAD CAMERA

$A+B=1$ ---- (1)

$2A+C=0$ ---- (2)

$A-B-C=0$ ---- (3)

وكل (2) ، (3) أنياً

$2A+C=0$ --- (2)

$A-B-C=$ --- (3)

$3A-B=0$ --- (4)

وكل (4) و (1) أنياً

$3A-B=0$ --- (4)

$A+B=1$ --- (1)

$4A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{1}{4}+B=1$ من (1) $\Rightarrow B=\frac{3}{4}$

$\therefore 2A+C=0$ --- (2) $\Rightarrow 2\times\frac{1}{4}+C=0 \Rightarrow C=\frac{-1}{2}$

(نفرض رفع التكامل عن المقام N المفروض)

$$= \int \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)}dx + \int \frac{\frac{3}{4}}{(x+1)}dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{(x+1)^2}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \ln(x-1) + \frac{3}{4}\ln(x+1) - \frac{1}{2} * \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C$$

(نضرب والمقام نقسم على الرقم المكتوب)

$$= \frac{1}{4}\ln(x-1) + \frac{3}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + C$$

REDMI NOTE 9 PRO
AI QUAD CAMERA

ex.3 $\int \frac{x^2-7}{x^3-2x^2-3x}\,dx$

Sol

$$\int \frac{x^2-7}{x(x^2-2x-3)}\,dx = \int \frac{x^2-7}{x(x-3)(x+1)}\,dx$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x+1)}$$

$$= \frac{A(x-3)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-3)}{x(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{A(x^2+x-3x-3) + Bx^2 + Bx + Cx^2 - 3Cx}{x(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{Ax^2 - 2Ax - 3A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - 3Cx}{x(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2(A+B+C) + x(-2A+B-3C) - 3A}{x(x-3)(x+1)}$$

$A+B+C = 1$ ---①

$-2A+B-3C = 0$ ---②

$-3A = -7 \Rightarrow A = \frac{7}{3}$

ثم نجد ② و ① نطرح:

$A+B+C = 1$ ---①

$\pm 2A \mp B \pm 3C = 0$ ---②

$3A + 4C = 1 \Rightarrow$

REDMI NOTE 9 PRO
AI QUAD CAMERA

$3 * \frac{7}{3} + 4C = 1$

$4C = -6 \Rightarrow C = \frac{-6}{4} = \boxed{\frac{-3}{2}}$

نعوض A و C في معادلة ①

$\frac{7}{3} + B - \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow B = 1 + \frac{3}{2} - \frac{7}{3} = 1 + \frac{9-14}{6} =$

$1 + \frac{-5}{6} = \frac{6-5}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$

$= \int \frac{\frac{7}{3}}{x} dx + \int \frac{\frac{1}{6}}{(x-3)} dx + \int \frac{-\frac{3}{2}}{(x+1)} dx$

$= \frac{7}{3} \int x^{-1} dx + \frac{1}{6} \int (x-3)^{-1} dx - \frac{3}{2} \int (x+1)^{-1} dx$

$= \frac{7}{3} \ln(x) + \frac{1}{6} \ln(x-3) - \frac{3}{2} \ln(x+1) + c$

REDMI NOTE 9 PRO
AI QUAD CAMERA