Limits — الغايات

تعريف :- يقال أن غاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من a هي L .

نكتب $\lim_{x \to a} f(x) = L$ اذا كانت $f(x)$ تقترب من L

كلما اقتربت x من a

ملاحظات :- ① لا يشترط ان تكون الدالة معرفه عند a وأنما يشترط ان تكون الدالة معرفه على جانبي النقطة a .

② $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$ تعني غاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من a من جهه اليمين وتساوي L_1

③ $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$ تعني غايه الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من a من جهه اليسار وتساوي L_2

④ فأن الغايه تكون موجودة ويعبر عن ذلك بالشكل

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

⑤ اذا كانت الغايه من اليمين $\neq$ الغاية من اليسار , اي اذ $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$ فأن $\lim_{x \to a} f(x)$ تكون غير موجودة

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اذا كانت $\lim_{x \to a^+} f(x)$ غير موجودة او

$\lim_{x \to a^-} f(x)$ غير موجودة .

فان $\lim_{x \to a} f(x)$ غير موجودة

نظريات (قواعد) حول الغاية

① $\lim_{x \to a} c = c$ غاية العدد الثابت = العدد الثابت نفسه

② $\lim_{x \to a} [f(x) \mp g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \mp \lim_{x \to a} g(x)$

③ $\lim_{x \to a} A f(x) = A \lim_{x \to a} f(x)$ A is any Constant

④ $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

⑤ $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

⑥ $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

⑦ $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$

⑧ $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$, $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

⑨ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

⑩ $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, $\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

* (هنالك كميات غير معرفة نذكر منها ما يأتي) .

$$\left[\frac{0}{0} , 0^2 , \infty \mp \infty , \infty , \frac{\infty}{\infty} \right]$$

امثلة على الغايات

Ex 1

جد الغاية ان وجدت

ⓐ $\lim_{x \to 0} |x|$. ⓑ $\lim_{x \to 1} |x|$

يمين ، يسار

جوار النقطة 0

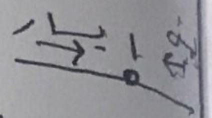
Sol $\because |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

حسب تعريف المطلق

$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$ and $\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0 \Rightarrow$

$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^-} |x| \Longrightarrow \lim_{x \to 0} |x| = 0$

(b) $\lim\limits_{x \to 1^+} |x| = \lim\limits_{x \to 1^+} x = 1$. and $\lim\limits_{x \to 1^-} |x| = \lim\limits_{x \to 1^-} (x) = 1$



$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} |x| = \lim\limits_{x \to 1^-} |x| = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x \to 1} |x| = 1$

Ex 2 (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$. (b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{|x|}{x}$

Sol

حسب تعريف المطلق

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ -\frac{x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} (1) = 1$. and $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} (-1) =$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$

$\Rightarrow$ limit does not exist

∴ النهاية غير موجودة