٢٠٢١ /٢/١٧ المناقشة

أيجاد الحل العام بطريقة المتجهات والقيم الذاتية

EX: Find the general solution:

$x_1' = 4x_1 + 2x_2$

$x_2' = 3x_1 - x_2$

Solution: $x' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} x$ حولناه الى صيغ المصفوفات

$$\det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda)-6$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda+2)(\lambda-5) = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 5$$

$\lambda_1 = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$ let $u_1 = 1 \Rightarrow u_2 = -3$

$3u_1 + u_2 = 0$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = u^{(1)}$

$\lambda_2 = 5$ عندما $u^{(2)}$ نجد بنفس الطريقة

$$u^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; x(t) = c_1 u^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 u^{(2)} e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}$$

Ex : $x_1' = 4x_1 - 3x_2$ Find the general solution
$x_2' = 3x_1 + 4x_2$

Solution : $x' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)^2 + 9 = 0$

$\lambda_2 = 4+3i \;,\; \lambda_1 = 4-3i$

$\cancel{\lambda_1 = 4+3i}$ $\lambda_1 = 4-3i \Rightarrow [A - (4-3i)I]V = 0$

$\begin{bmatrix} 3i & -3 \\ 3 & 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 3iu_1 - 3u_2 = 0$

$iu_1 = u_2 \Rightarrow \text{let } u_1 = 1$

$\therefore u_2 = i$

$\therefore u^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(4-3i)t} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{4t}(\cos 3t - i\sin 3t)$

$= e^{4t} \begin{bmatrix} \cos 3t - i\sin 3t \\ i\cos 3t + \sin 3t \end{bmatrix}$

نفصل الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي

$x_1(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{bmatrix} \;,\; x_2(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} -\sin 3t \\ \cos 3t \end{bmatrix}$

$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$

الحل بواسطة
المصفوفة الاساسية

Ex: Find the fundamental matrix of the system

$$x' = 4x + 2y \qquad , x(0) = 1$$
$$y' = 3x - y \qquad\quad y(0) = -1$$

Solution:

باستخدام المتجهات والقيم الذاتية نجد المصفوفة الاساسية

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi^{-1}(0) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل العام بطريقة المصفوفة الاساسية

$$X(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(0) \cdot X(0) \longrightarrow$$ يمثل الشرط الابتدائي للمسألة

$$= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3e^{-2t} + 4e^{5t} \\ -9e^{-2t} + 2e^{5t} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; x(t) = \frac{3}{7} e^{-2t} + \frac{4}{7} e^{5t}$$

$$y(t) = \frac{-9}{7} e^{-2t} + \frac{2}{7} e^{5t}$$

$x(t) = e^{t}$

المصفوفات الأسية

Ex: Find the exponential matrix of A, where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!}$$

$$\therefore e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 3t & 4t + 9t^2 \\ 0 & 1 & 6t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

طريقة للحل وإيجاد المصفوفة الأسية:

$$\boxed{e^{At} = \phi(t) \cdot \phi^{-1}(0)}$$

Ex: Find e^{At} for $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Solution:

بما أن المصفوفة مثلثية علوية
فإن المعادلة المميزة

$$(5-\lambda)(3-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5$$
$$\lambda_2 = \lambda_3 = 3$$

$$\lambda_1 = 5 \Rightarrow (A-5I)u = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$2u_2 + 4u_3 = 0 \Rightarrow u_3 = 0$$
$$-2u_1 + 4u_2 + 5u_3 = 0$$
$$2u_1 = 4u_2 \Rightarrow u_1 = 2, \ u_2 = 1$$
$$\Rightarrow u^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{X_1(t) = e^{5t} u^{(1)}}$$

$$\lambda_2 = 3 \Rightarrow (A-3I)u = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$4u_1 + 5u_2 = 0 \qquad 4u_1 + 5u_2 = 0$$
$$2u_1 + 4u_2 = 0 \Rightarrow u_1 + 2u_2 = 0$$

فنلاحظ انها ليست مضاعفات الذي يحقق المعادلتين
هو ان يكون u_1 و u_2 اصفار / لذلك نأخذ
قيم اختيارية لذلك

$$u^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{X_2(t) = e^{3t} u^{(2)}}$$

$$\lambda_3 = 3 \Rightarrow (A-3I)^2 u = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 16 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad u^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$4u_2 + 8u_3 = 0 \Rightarrow u_2 = -2u_3, \ \text{let } u_3 = -1 \Rightarrow u_2 = 2$$

$$X_3(t) = e^{3t}[u^{(3)} + (A-3I)u^{(3)}t] = e^{3t}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} t \right)$$

$$= e^{3t} \begin{bmatrix} 3t \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \Phi(t) = [X_1(t) \ X_2(t) \ X_3(t)]$$

$$\therefore \ \Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{5t} & e^{3t} & 3te^{3t} \\ e^{5t} & 0 & 2e^{3t} \\ 0 & 0 & -e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(0)$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{5t} & e^{3t} & 3te^{3t} \\ e^{5t} & 0 & 2e^{3t} \\ 0 & 0 & -e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{3t} & 2e^{5t}-2e^{3t} & 4e^{5t}-(4+3t)e^{3t} \\ 0 & e^{5t} & 2e^{5t}-2e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

Variation of Parameters

طريقة تغاير المعلمات:

وهي طريقة لحل المعادلات التفاضلية غير المتجانسة من الرتبة الثانية

$$y'' + a_1(t)\,y' + a_0(t)\,y = f(t)$$

الحل الخاص بالصيغة:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$u_1(t) = \int \frac{-y_2(t)\,f(t)}{W(y_1,y_2)}\,dt \qquad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)\,f(t)}{W(y_1,y_2)}\,dt$$

<u>EX</u>: Find the general solution of the nonhomogeneous equation $y'' - 5y' + 6y = 2e^{t}$

<u>Solution</u>

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \Rightarrow m_1 = 3,\ m_2 = 2$$

$$\therefore y_1(t) = e^{3t},\quad y_2(t) = e^{2t} \Rightarrow W(y_1,y_2) = -e^{5t}$$

$$u_1(t) = \int \frac{-e^{2t}\cdot 2e^{t}}{-e^{5t}}\,dt = \int 2e^{-2t}\,dt = -e^{-2t}$$

$$u_2(t) = \int \frac{e^{3t}\cdot 2e^{t}}{-e^{5t}}\,dt = \int -2e^{-t}\,dt = 2e^{-t}$$

الحل الخاص $y_p = (-e^{-2t})(e^{3t}) + (2e^{-t})(e^{2t}) = e^{t}$

$$y(t) = y_h + y_p = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} + e^{t}$$

<u>Ex</u>: Find a particular solution of the differential equation:

$$t^2 y'' - 2y = 3t^2 - 1$$

<u>Solution</u>: من الواضح ان هذه المعادلة هي معادلة اويلر

السبب ان المعاملات ليست ثوابت (بسبب وجود t^2)

لذلك نفرض الاتي $t = e^x$

وان :

$$t^2 y'' = D(D-1)y$$

المعادلة المتجانسة بدلالة المؤثر D

$$\Rightarrow D(D-1)y - 2y = 0$$

$$(D^2 - D - 2)y = 0$$

$$(m^2 - m - 2)y = 0 \Rightarrow (m+1)(m-2) = 0$$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

حسب الفرضية $t = e^x \Rightarrow \frac{1}{t} = e^{-x} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{t}$

$$t = e^x \Rightarrow t^2 = e^{2x} \Rightarrow y_1 = t^2$$

أو يمكن تسميتها y_1

بالتالي $y_1 = t^2$, $y_2 = \frac{1}{t}$ هي الدوال الناتجة من حل الجزء المتجانس للمعادلة التفاضلية

$$W\left(t^2, \frac{1}{t}\right) = \begin{vmatrix} t^2 & \frac{1}{t} \\ 2t & -\frac{1}{t^2} \end{vmatrix} = t^2\left(-\frac{1}{t^2}\right) - 2t\left(\frac{1}{t}\right) = -3$$

$$u_1 = -\int \frac{y_2 f}{W} = -\int \frac{1}{t}\left(3 - \frac{1}{t^2}\right) dt$$

السبب ان المعادلة اصبحت بعد القسمة على t^2

$$y'' - \frac{2}{t^2} y = 3 - \frac{1}{t^2}$$

$$\therefore\ u_1 = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{3} t^{-3} = \ln t + \frac{1}{6} t^{-2}$$

$$u_2 = \int \frac{t^2\left(3 - \frac{1}{t^2}\right)}{-3}\, dt = \int -t^2 + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{3}t$$

$$y_p = u_1 y_1 + y_2 u_2$$

الحل الخاص

$$= \left(\ln(t) + \frac{1}{6} t^{-2}\right) t^2 + \frac{1}{3}\left(-t^3 + t\right)\left(t^{-1}\right)$$

$$= t^2 \ln(t) + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} t^2 + \frac{1}{3}$$

$$= t^2 \ln(t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} t^2 \quad \neq / \ \cancel{t^2 \ln(t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{t}{1}}$$