مثال حل مسالة القيم الابتدائية

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} y \quad , \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحل : ان متعددة الحدود المميزة للمصفوف $A = \begin{bmatrix} & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

هي $p(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 12 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 36 = (\lambda - 7)(\lambda + 5)$

القيم الخاصة للمصفوفة A $\lambda_2 = -5, \lambda_1 = 7$

فاذا كانت $\lambda_1 = 7$ ولكي نجد المتجه الخاص v' نعوض بالمعادلة $7 = \lambda_1$

$$\ldots\ldots (A - \lambda I)\, v = 0 \qquad \ldots\ldots(45)$$

نجد ان

$$(A - 7I)\, v = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أي ان

$$-6v_1 + 12v_2 = 0$$
$$3v_1 - 6v_2 = 0$$

وهما يمثلان معادلة واحدة وهي $v_1 = 2v_2$

وان $v^1 = v_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ هو المتجه الخاص المقابل الى $\lambda_1 = 7$ وعندما $\lambda = \lambda_2 = -5$

وبالتعويض عند λ_2 بالمعادلة (45) نجد ان

$$(A + 5I)\, v = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$6v_1 + 12v_2 = 0$$

$$3v_1 + 6v_2 = 0$$

ونجد من المعادلتين ان $v_1 = -2v_2$ وان المتجه الخاص المقابل الى $\lambda_2 = -5$ هو

$$v^2 = v_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وعلى هذا فان حل النظام المعلوم هو عندما $v_2 = 1$ هما الدالتان المتجهتان

$$y^2(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5t}, \quad y'(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{7t}$$

والحل العام هو

$$y'(t) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{7t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5t}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2c_1 e^{7t} - 2c_2 e^{-5t} \\ c_1 e^{7t} + c_2 e^{-5t} \end{bmatrix}$$

وبالتعويض بالشرط الاولي ، نجد

$$y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 - 2c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

أي ان $0 = 2c_1 - 2c_2$, $c_1 + c_2 = 1$ وبحل هاتين المعادلتين نجد ان

$$c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{1}{2}$$

وعلى هذا فان حل مسألة القيم الابتدائية هو

$$y(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{7t} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5t} = \begin{bmatrix} e^{7t} - e^{-5t} \\ \frac{1}{2} e^{7t} + \frac{1}{2} e^{-5t} \end{bmatrix}$$