صور الطور phase portrait

رسمنا مسارات للجسيم عندما تكون النقطة الابتدائية اختيارية فاننا سنملأ المستوى (مستوى الطور) بها ويسمى الناتج صور الطور

ملاحظات (١) يمر بأي نقطة في المستوى مسار واحد على الاغلب

(٢) اذا مر المسار بالنقطة (x_0, y_0) في زمنين مختلفين t_1, t_2 فان الحل يكون دوريا والمسار منحنى مغلق

(٣) اذا كان النظام $\boxed{\dot{x} = Ax}$ وكان $|A| \neq 0$ فان نقطة الاصل هي النقطة الحرجة الوحيدة واذا كان $|A| = 0$ فان النقاط الحرجة هي نقاط الخط المستقيم.

(٤) اذا كانت القيم الذاتية للمصفوفة A حقيقية فان الشعاع الموازي للمتجه الذاتي من نقطة الاصل يكون مسار

(٥) تعتبر النقطة الحرجة مسار

مثال جسيم يتحرك في المستوى حسب المعادلات التالية

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x$$

عين صور المسار الذي يمر عليه الجسيم اذا كان في الموقع $(-1, 0)$ في بداية الزمن

Sol

$$(x(0), y(0)) = (-1, 0)$$
$$x(0) = -1$$
$$y(0) = 0$$
$$\dot{x} = y \Rightarrow \ddot{x} = \dot{y} = -x$$
$$\ddot{x} + x = 0$$
$$m^2 + 1 = 0$$
$$m_1 = i, \; m_2 = -i$$
$$x(t) = A\cos t + B\sin t$$
$$x(0) = A \Rightarrow \boxed{A = -1} \qquad x(0) = 1$$
$$\dot{x}(0) = \sin(0) + B\cos(0)$$

$x'(0) = \beta$

$x' = y \Rightarrow x'(0) = y(0) \Rightarrow y(0) = \beta = 0$ (إذن $y(0)=0$)

$\therefore X(t) = -\cos t \Rightarrow x^2(t) = \cos^2 t$

$y(t) = -x' = \sin t \qquad y^2(t) = \sin^2 t$

$\therefore x^2(t) + y^2(t) = 1$

معادلة دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 1

Ex Find the critical points of the system.

$x' = 3x - 2y$

$y' = 2x - 3y$

Sol $3x - 2y = 0$ —— (1)

$2x - 3y = 0$ —— (2)

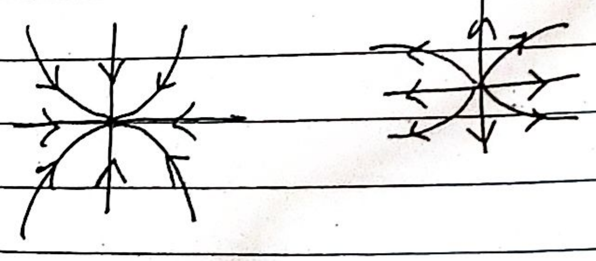
(1) $\Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow x = \frac{2}{3}y$ —— (3)

نعوض (3) في (2)

$\frac{4}{3}y - 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$

$\therefore$ critical point $(0,0)$

صور الطور للحالات الفعلية



صور الطور للحالات الفعلية:

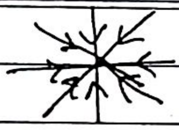
$\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ القيم الذاتية حقيقية ومختلفة وبإشارة واحدة $\lambda < \mu < 0$

أو $\mu > \lambda > 0$

نقطة الأصل عقدة غير صحيحة (improper node)

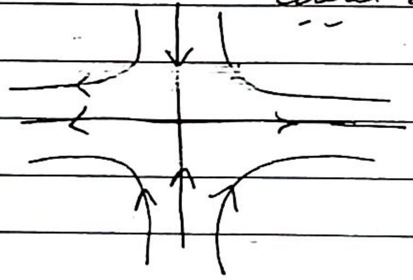
$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ القيم الذاتية حقيقية متساوية العقدة proper node

أما $\lambda > 0$ ويكون عندها اتجاه الأسهم يبتعد عن نقطة الأصل



٢) إذا $\lambda < 0$ ويكون عندها اتجاه الأسهم باتجاه نقطة الأصل
(نقطة الأصل عقدة صحيحة)

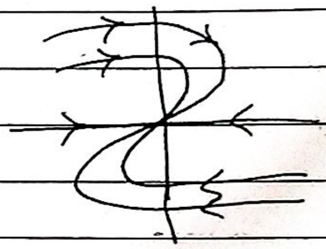
③ $\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}$ $\lambda \neq 0$, $A = \lambda I$ والقيم الذاتية حقيقية



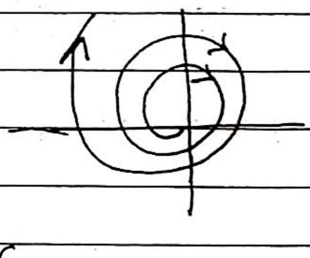
(نقطة الأصل سرجية) $\mu < 0 < \lambda$

④ $\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ $\lambda > 0$ or $\lambda < 0$ القيم الذاتية حقيقية $A \neq \lambda I$

improper node



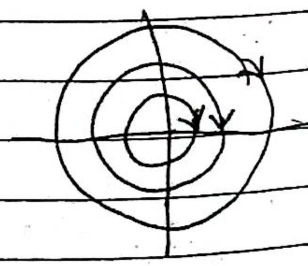
⑤ $\begin{bmatrix}\sigma & v\\ v & \sigma\end{bmatrix}$ القيم الذاتية عقدية حيث $\lambda = \sigma + iv$ ، $\sigma > 0$
(نقطة الأصل تسمى نقطة حلزونية) أو $\sigma < 0$
$v \neq 0$



⑥ $\begin{bmatrix}0 & v\\ -v & 0\end{bmatrix}$ القيم الذاتية عقدية $\lambda = \mp iv$

تعتبر حالة خاصة من الحالة الخامسة حيث $\sigma = 0$
(نقطة الأصل تسمى نقطة مركز)

center point



الحالات الستة

1. $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ $\mu < \lambda < 0$ or $0 < \mu < \lambda$

2. $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $\lambda > 0$ or $\lambda < 0$

3. $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ $\mu < 0 < \lambda$

[illegible] 4. $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $\lambda > 0$ or $\lambda < 0$

5. $\begin{bmatrix} \sigma & \nu \\ -\nu & \sigma \end{bmatrix}$ $\nu \neq 0$, $\sigma > 0$ or $\sigma < 0$

6. $\begin{bmatrix} 0 & \nu \\ -\nu & 0 \end{bmatrix}$ $\nu \neq 0$

Stability of the solution الاستقرارية

النموذج الاول

Ex sketch the phase portrait of the system $\dot{x} = Ax$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = [A]\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

where $A = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

Sol. $\lambda = 2,\ \mu = 1 > 0$

مصدر عقدة

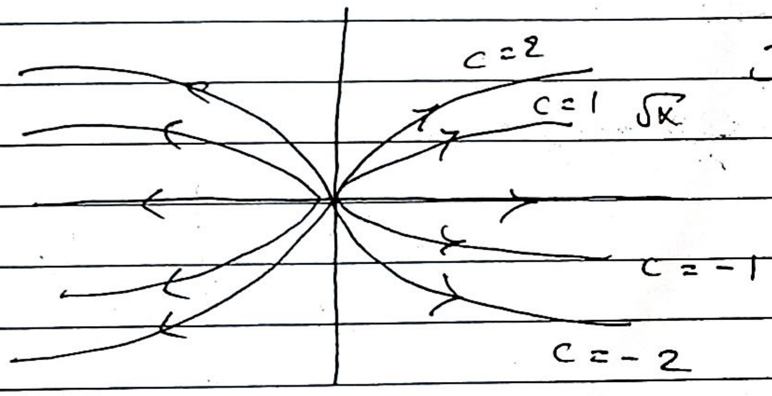
$$\frac{dx}{dt} = 2x\ ,\ \frac{dy}{dt} = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\frac{1}{2}} + \ln c$$

$$y = c\sqrt{x}$$

نعطي ال c اختيارية

اي نأخذ جميع الاتجاهات



لاحظ اتجاه الاسهم الى الخارج لان $\lambda > \mu > 0$

(The origin points is improper نقطة الاصل عقدة غير حقيقية

Note study the stability $(0,0)$ in Ex ①

لمعرفة استقرارية الحل : بالشكل التالي

اذا : $\lim\limits_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (\infty, \infty)$

نقول ان الحل غير مستقر

$$\frac{dx}{dt} = 2x \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int 2\,dt$$

$$\ln x = 2t + c_1 \Rightarrow x(t) = c_1 e^{2t}$$

بنفس الطريقة نجد

$$y(t) = c_2 e^{t}$$

$$\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = \lim_{t \to \infty} (c_1 e^{2t}, c_2 e^{t}) = (\infty, \infty)$$

الحل غير مستقر

① $\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (\infty, \infty)$ ⎫ الحل غير مستقر

② $\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (\infty, 0)$ or $(0, \infty)$ ⎭

③ $\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (0,0)$? $\Rightarrow$ حل مستقر

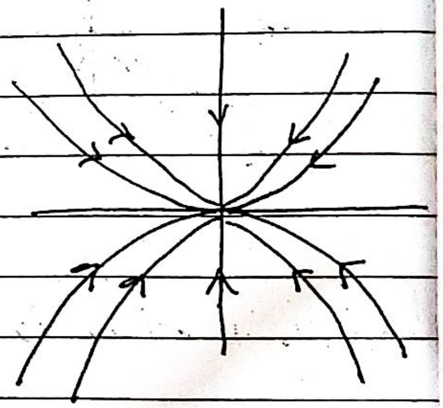
Ex ① $\mu < \lambda < 0$ $\boxed{\text{النموذج الاول}}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

لما ان $\mu < \lambda < 0$ يكون اتجاه الاسهم داخلاً الى نقطة الاصل

$$\frac{dx}{dt} = -x \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{-x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} \Rightarrow y = cx^2$$



the origin is improper node نقطة الاصل عقدة غير صحيحة

نبحث عن استقرارية الحل لهذا المثال

$$\frac{dx}{dt} = -x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -dt$$

$$x(t) = c_1 e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dt} = -2y \Rightarrow y(t) = c_2 e^{-2t}$$

$$\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = \lim_{t \to \infty} (c_1 e^{-t}, c_2 e^{-2t}) = (0,0)$$

هو الحل مستقر باستقرارية تامة

$\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (0,0)$ ملاحظة اذا كان

فهذا الحل مستقر استقرارية تامة

Ex Find the critical points of the system

$$\dot{x} = 3x - 2y$$
$$\dot{y} = 2x - 3y$$

Sol $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow x = \frac{2}{3}y$

$\frac{4}{3}y - 3y = 0 \Rightarrow y = 0$ and $x = 0$

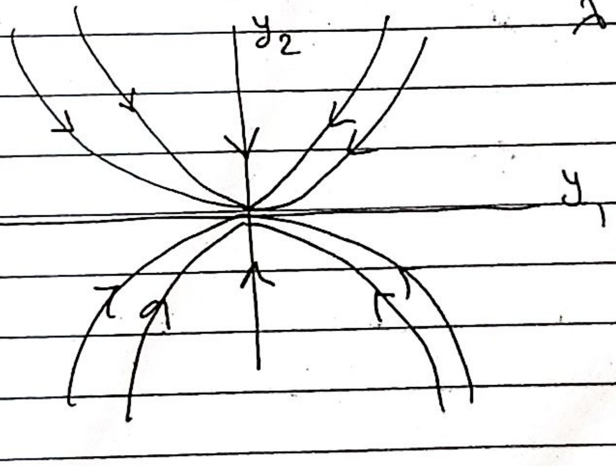
then $(0,0)$ critical point.

we consider only the case $\det A \neq 0$. This means that zero is not an eigenvalue of A and that the origin is the only critical point. we have six case for phase portraite

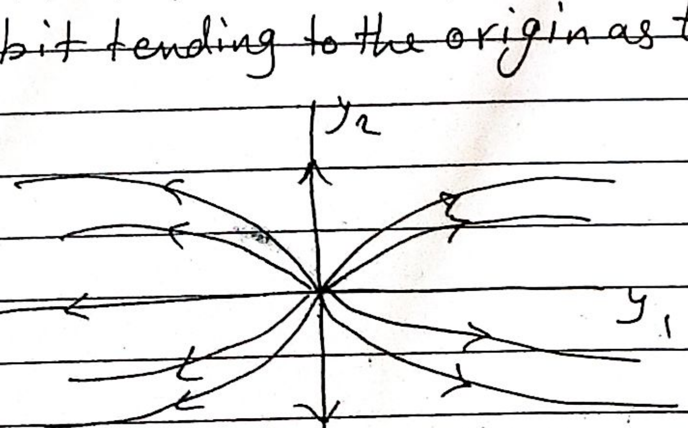
(i) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, where $\mu < \lambda < 0$ or $0 < \mu < \lambda$

اي ان القيم الذاتية اما اكبر من صفر او اقل من صفر

ودائماً μ اصغر من λ



if $\mu < \lambda < 0$, we have $\varphi(t) \to 0$ as $t \to +\infty$ every orbit tending to the origin as $t \to +\infty$



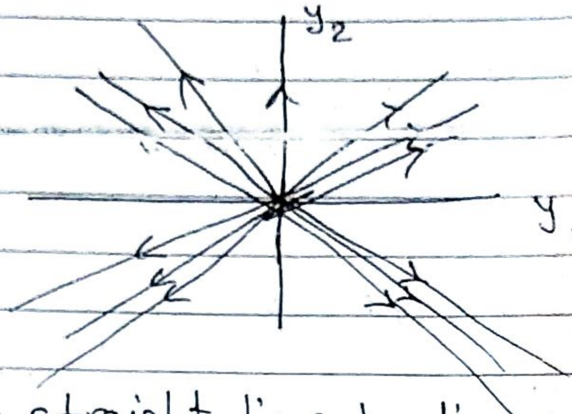
if $0 < \mu < \lambda$, every orbit tending away from the origin as

Case (i) is called improper node عقدة غير سوية

الحالة الثانية

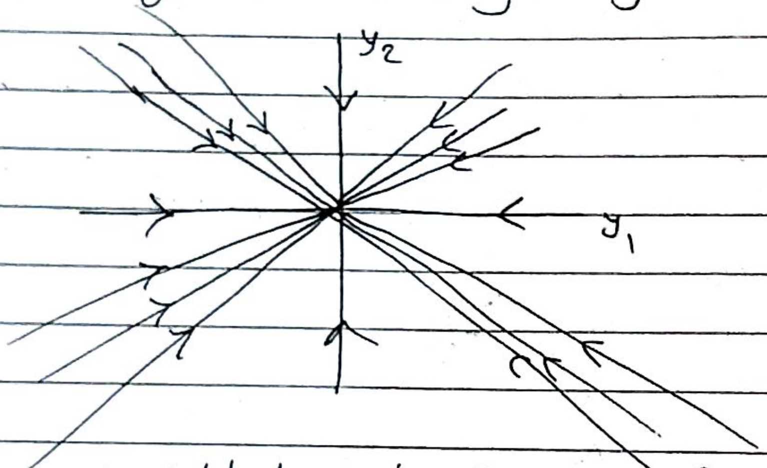
Ex $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ where $\lambda > 0$, or $\lambda < 0$ القيم الذاتية متساوية

if $\lambda > 0$



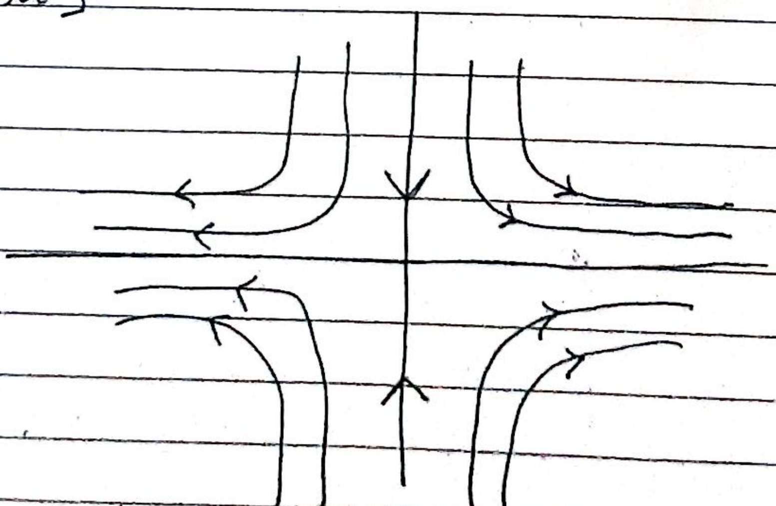
all orbits are straight lines tending away from the origin

if $\lambda < 0$



all orbits are straight lines tending away from the origin
Case (ii): is called a proper node: عقدة فعلية

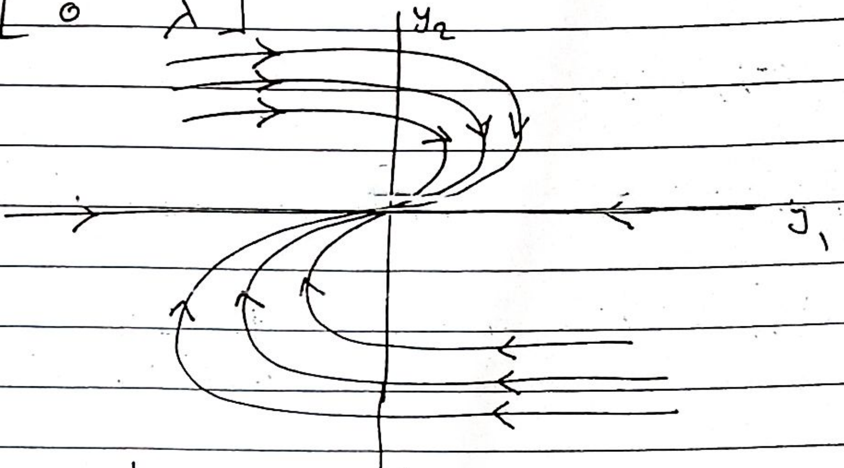
(iii) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ $\mu < 0 < \lambda$ الحالة الثالثة



Case (iii) is called saddle point: نقطة سرجية

الحالة الرابعة

Ex $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ where $\lambda > 0$ or $\lambda < 0$



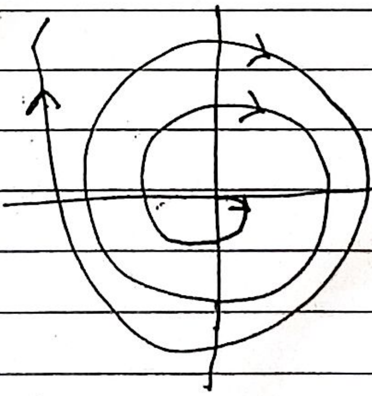
if $\lambda > 0$ اتجاه السهم الى الداخل $\lambda < 0$

Case (iv): improper node عقدة غير صحيحة الحالة

الحالة الخامسة

(v) $\begin{bmatrix} \sigma & \nu \\ -\nu & \sigma \end{bmatrix}$, Where $\nu \neq 0$, and $\sigma > 0$ or $\sigma < 0$

Complex Conjugate eigenvalue of A $\sigma \mp i\nu$



if $\sigma > 0$

$\sigma > 0$ السهم الى الخارج
باتجاه عقرب الساعة

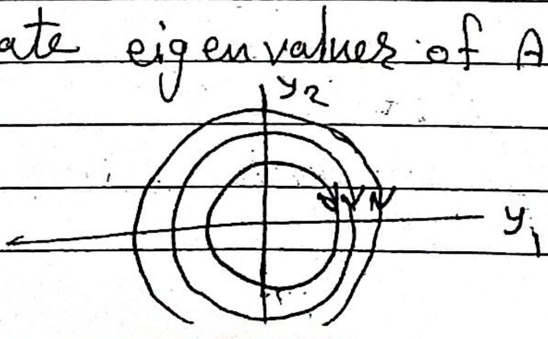
if $\sigma \cancel{>} 0$

Case (v): spiral point نقطة حلزونية

(vi) $\begin{bmatrix} 0 & \nu \\ -\nu & 0 \end{bmatrix}$ where $\nu \neq 0$ الحالة السادسة

Complex Conjugate eigenvalues of A $\mp i\nu$

Case (vi): Center



stability of solution استقرارية الحل

1) $\lim\limits_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (\infty, \infty)$ — الحل غير مستقر

2) $\lim\limits_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (\infty, 0)$ or $(0, \infty)$ — unstabil solution

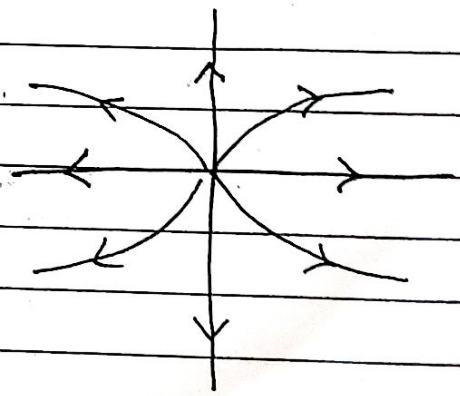
3) $\lim\limits_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$ stable solution الحل المستقر
استقرارية تامة

Ex sketch the phase portrait of the system $\dot{x} = Ax$
where $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sol $\lambda = 2 > \mu = 1 > 0$ الحالة الاولى

$$\frac{dx}{dt} = 2x \;, \; \frac{dy}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$$



$$\ln y = \tfrac{1}{2}\ln x + c$$
$$\ln y = \ln x^{\frac{1}{2}} + \ln c$$
$$y = c\sqrt{x}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2x \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2dt \Rightarrow \ln x = 2t + c$$
$$x = c_1 e^{2t}$$

$$\frac{dy}{dt} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dt \Rightarrow \ln y = t + c_2$$
$$y = c_2 e^{t}$$

$$\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = \lim_{t \to \infty} (c_1 e^{2t}, c_2 e^{t}) = (\infty, \infty)$$

the origin is improper node and the solution is un

$\mu < \lambda < 0$

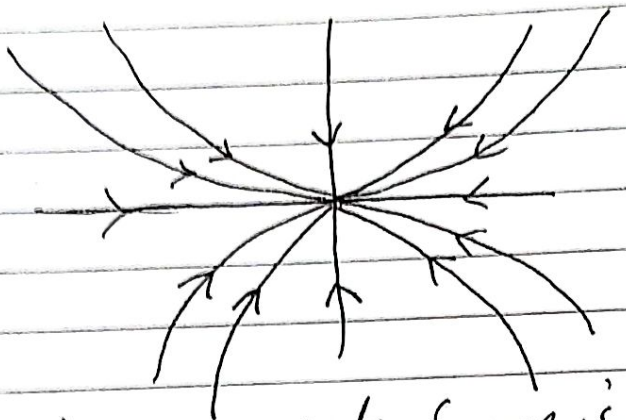
| النموذج الاول |

$$\underline{\underline{Ex}} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

∴ لان $0 > \lambda > \mu$ يكون اتجاه الاسهم داخلة الى نقطة الاصل

$$\frac{dx}{dt} = -x \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{-x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2\frac{dx}{x} \Rightarrow y = cx^2$$



The origin is improper node نقطة الاصل عقدة غير صحيحة

نبحث عن استقرارية الحل لهذا المثال

$$\frac{dx}{dt} = -x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -dt$$

$$x(t) = c_1 e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dt} = -2y \Rightarrow y(t) = c_2 e^{-2t}$$

$$\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = \lim_{t \to \infty} (c_1 e^{-t}, c_2 e^{-t}) = (0,0)$$

∴ الحل مستقر باستقرارية تامة

ملاحظة اذا كان $\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (0,0)$

يكون الحل مستقر استقرارية تامة.

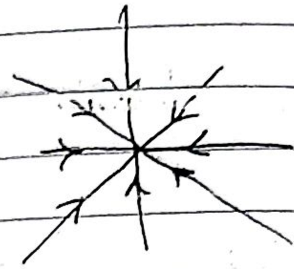
النموذج الثاني

Ex $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

القيم الذاتية نفس الرقم والإشارة مختلفة

$\frac{dx}{dt} = -2x \ , \ \frac{dy}{dt} = -2y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{-2x} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = cx$



$x(t) = c_1 e^{-2t} \ , \ y(t) = c_2 e^{-2t}$

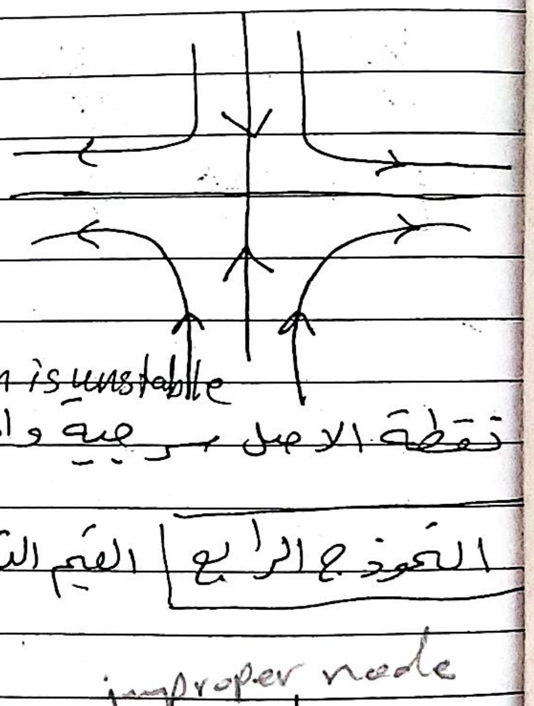
$\lim_{t \to \infty} (c_1 e^{-2t}, c_2 e^{-2t}) = (0,0)$

الحل مستقر استقرارية تامة ونقطة الاصل عقدة صحيحة

النموذج الثالث القيم الذاتية واحدة موجبة والاخرى سالبة $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$

$\frac{dx}{dt} = 2x \Rightarrow x(t) = c_1 e^{2t}$

$\frac{dy}{dt} = -y \Rightarrow y(t) = c_2 e^{-t}$



$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2x} \Rightarrow y = \frac{c}{\sqrt{x}}$

$\lim (x(t), y(t)) = (\infty, 0)$

the origin is saddle point and the solution is unstable

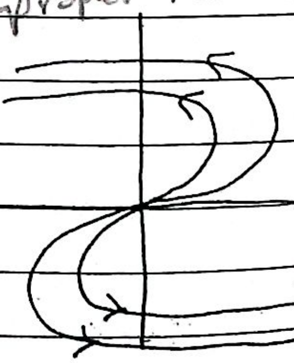
نقطة الاصل سرجية والحل غير مستقر

$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

النموذج الرابع القيم الذاتية اما اكبر من صفر او اصغر من صفر

$\frac{dx}{dt} = 2x + y \qquad \frac{dy}{dt} = 2y$

improper node



$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{2x+y}$ لا يمكن فصل المتغيرات

let $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow y' = v + xv'$

باستخدام الطريقة المتجانسة

$y = c e^{2x/y}$ معادلة في الكراسة بتفرعات إيجابية للوصول الى الحل

$$\frac{dy}{dt} = 2y \Rightarrow y = c_1 e^{2t}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y \Rightarrow x' - 2x = y$$ معادلة خطية

$$x' - 2x = c_1 e^{2t}$$

$$I = e^{\int -2\,dt} = e^{-2t}$$

$$I x = \int I q * q(t)\,dt \Rightarrow x = (c_1 t + c_2) e^{2t}$$

$$\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (\infty, \infty)$$

∴ نقطة الاصل عقدة غير صحيحة والحل غير مستقر

the origin is improper node and the solution is unstable

$$\boxed{\text{النوع السادس}}$$

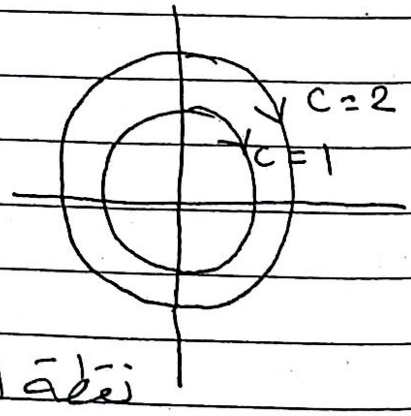
$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\frac{dx}{dt} = 4y \ , \ \frac{dy}{dt} = -4x \quad \dots\dots ①$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{4y} \Rightarrow \int y\,dy = \int -x\,dx$$

$$y^2 = -x^2 + c \Rightarrow y^2 + x^2 = c$$

معادلة القطع الناقص مركز نقطة الاصل ونصف قطره c يتغير كبير الرسم يتغير حسب c لتحديد اتجاه الاسهم نأخذ نقطة على الرسم مثل (1,0) نعوضها في ① $\frac{dy}{dx} = -2$ مثلا قيمة وبالتالي في الرسم يكون اتجاه الاسهم باتجاه عقارب الساعة



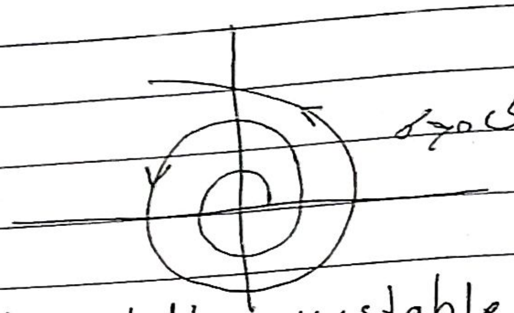
نقطة الاصل شبه مركز والحل الصفري مستقر حتما

Ex $\acute{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

الحالة الخامسة

$v = -1$, $\sigma = 1$

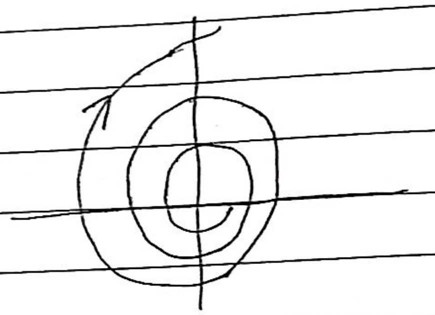
$\frac{\sigma}{v} = -1 < 0$ ⟸ الرسم على اتجاه عقرب الساعة



اتجاه الاسهم الى خارج

the origin is spiral and the solution unstable

ملاحظة اذا كان $\frac{\sigma}{v} > 0$ يكون الرسم باتجاه عقرب الساعة



اتجاه الاسهم حسب الاشارة

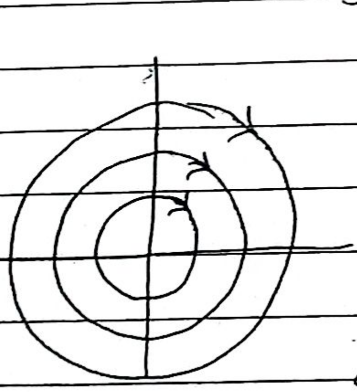
Ex $\acute{x} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} x$

الحالة السادسة

$\frac{dx}{dt} = 4y$ $\quad \frac{dy}{dt} = -4x$ $\quad v > 0$

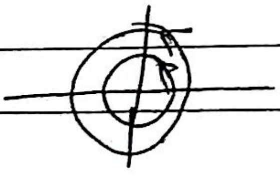
$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{4y} \Rightarrow y\,dy = -x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + c \Rightarrow y^2 + x^2 = c$

معادلة دائرة مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها c



باتجاه عقرب الساعة لان $v > 0$

ملاحظة اذا كان $v < 0$ فأن الرسم يكون عكس اتجاه عقرب الساعة

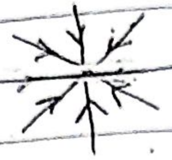


النموذج الثاني

$Ex \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

القيم الذاتية نفس الرقم بالاشارة مختلفة

$\frac{dx}{dt} = -2x \;,\; \frac{dy}{dt} = -2y$



$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{-2x} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = cx$

$x(t) = c_1 e^{-2t} \;,\; y(t) = c_2 e^{-2t}$

$\lim_{t \to \infty} (c_1 e^{-2t}, c_2 e^{-2t}) = (0,0)$

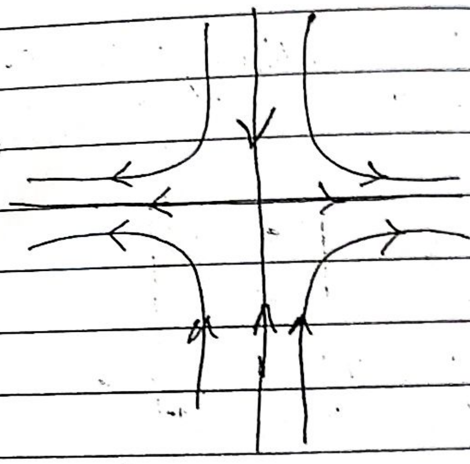
الحل مستقر استقرارية تامة ونقطة الاصل عقدة صحيحة

النموذج الثالث

القيم الذاتية واحدة موجبة والاخرى سالبة

$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\frac{dx}{dt} = 2x \Rightarrow x(t) = c_1 e^{2t}$



$\frac{dy}{dt} = -y \Rightarrow y(t) = c_2 e^{-t}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2x} \Rightarrow y = \frac{c}{\sqrt{x}}$

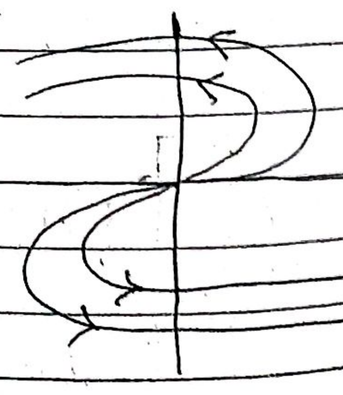
$\lim (x(t), y(t)) = (\infty, 0)$

نقطة الاصل سرجية والحل غير مستقر

النموذج الرابع

القيم الذاتية اما اكبر من صفر
او اقل من صفر

$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$



$\frac{dx}{dt} = 2x + y \qquad \frac{dy}{dt} = 2y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{2x+y}$ دالة مختلطة المتغيرات

باستخدام الطريقة المتجانسة

~~let $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx$~~

$\Rightarrow y' = v + xv'$

$y = ce^{2x/y}$ بما ان λ اكبر من صفر فإن اتجاه الاسهم الى الخارج

$\frac{dy}{dt} = 2y \Rightarrow y = c_1 e^{2t}$

$\frac{dx}{dt} = 2x + y \Rightarrow x' - 2x = y$ معادلة خطية

$x' - 2x = c_1 e^{2t}$

$I = e^{\int -2dt} = e^{-2t}$

$Ix = \int I q * q(t)\, dt \Rightarrow x = (c_1 t + c_2) e^{2t}$

$\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (\infty, \infty)$

∴ نقطة الاصل عقدة غير مستقرة والحل غير مستقر

النموذج السادس

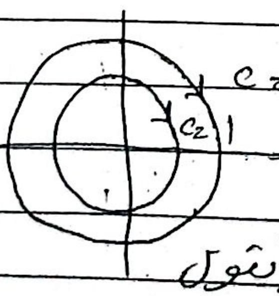
$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

$\frac{dx}{dt} = 4y, \frac{dy}{dt} = -4x \quad \ldots ①$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{4y} \Rightarrow \int y\,dy = \int -x\,dx$

$y^2 = -x^2 + c \Rightarrow y^2 + x^2 = c$

معادلة القطع الناقص مركزه نقطة الاصل ونصف قطره c يتغير
كبر الرسم يتغير مع c ولتحديد اتجاه الاسهم نأخذ نقطة على الرسم مثل (1,0)
نعوضها في ① $\frac{dy}{dx} = -2$ متناقصة وبالتالي الرسم يكون اتجاه الاسهم باتجاه
عقارب الساعة



نقطة الاصل تسمى مركز والحل الصفري
مستقر فقط

ملاحظة: المسار المغلق يعطي الحل المستقر ولا نقول
مستقر استقرارية تامة.

ملاحظة المسار المغلق يعطي الحل مستقر ولا نقول مستقر استقرار تام مقارب.

Exercise $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$

$$x_1 = x \rightarrow \dot{x}_1 = x_2$$
$$x_2 = \dot{x} \rightarrow \dot{x}_2 = 2x_2 - x_1$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(2-\lambda) + 1$$
$$= -2\lambda + \lambda^2 + 1$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 1)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ القيم الذاتية متساوية (الحالة الثالثة) موجبة
الحل غير مستقر

Exercise sketch the phase portrait of the equatio

$$6\ddot{y} + 7y = 0$$

$\ddot{y} + \frac{7}{6} y = 0$ نحول المعادلة الى نظام ونحل كما في المثال السابق

F (الحالة الخامسة) نقطة الاصل مركز والحل مستقر

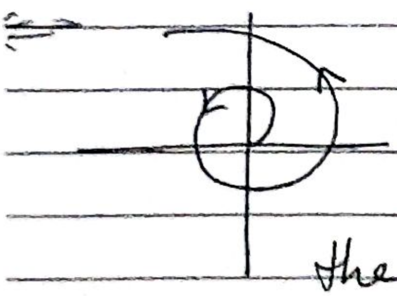
$$y_1 = y \Rightarrow \dot{y}_1 = y_2 \qquad \lambda = \mp i\sqrt{\frac{7}{6}}$$
$$y_2 = \dot{y} \Rightarrow \dot{y}_2 = \frac{-7}{6} y_1$$

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-7}{6} & 0 \end{bmatrix} Y \Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{7}{6} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{7}{6} = 0$$

Ex $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad v = -1,\ \sigma = 1$ نلاحظ $\boxed{\text{الوضع الخامس}}$

$\frac{\sigma}{v} = \frac{1}{-1} < 0 \Rightarrow$ الرسم على اتجاه عقرب الساعة

اتجاه الاسهم الى الخارج والحل غير مستقر $\sigma > 0$



نقطة الاصل حلزونية والحل غير مستقر

the origion is spiral and the solution unstable

Q) sketch phase portrait of the system

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x$$

$\lambda < 0 < \mu$

النموذج الثالث $\mu = 3 , \lambda = -3$

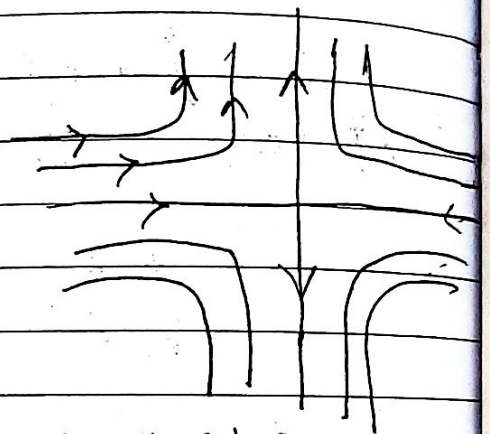
$\frac{dx}{dt} = -3x \quad , \frac{dy}{dt} = 3y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{-3x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-dx}{x}$

$\ln y = \ln x + \ln c \Rightarrow y = \frac{c}{x}$

$\ln y = \ln \frac{c}{x}$

$\frac{dx}{dt} = -3x \Rightarrow x(t) = c_1 e^{-3t}$



$\frac{dy}{dt} = 3y \Rightarrow y(t) = c_2 e^{3t}$

$\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = \lim (c_1 e^{-3t}, c_2 e^{3t})$

$= (0, \infty)$

نقطة الأصل سرجية ولكن غير مستقر

أمثلة عن حالات غير تكاملية

① نجد القيم الذاتية

② نحدد من حيث إذا كانت عقدة سرجية أو ... أي مركز

③ نرسم المتجهات الذاتية بعدها نحدد رسم الدالة

Ex sketch the phase portrait of the system

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} y$$

Sol $|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 7-\lambda & 6 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(7-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 14 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 9\lambda + 8 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 8) = 0 \Rightarrow$