

الفصل الثاني

خواص النظام البديهي

في أي نظام بديهي توجد ثلاثة مفاهيم مهمة هي:

- 1- الاتساق
- 2- الاستقلال
- 3- التمام

1- تعريف: (الاتساق (Consistency))

يكون النظام البديهي متسقا اذا فقط اذا لا توجد في النظام اي بديهيتين او بديهية ومبرهنة او أي مبرهنتين بالشكل $(P, \sim P)$ أي بمعنى لا يوجد بينهما تناقض.
◊ ان النظام الذي يكون فيه عبارة ما ونفيها صحيحا يكون نظاما لا معنى له .

تعريف: (تفسير النظام البديهي)

هو اعطاء معاني في الكلمات الاولية التقنية بطريقة بحيث تصبح البديهيات اما صائبة او خاطئة .

تعريف: (النموذج)

يقال للتفسير الذي يجعل كل بديهية في مجموعة من بديهيات صائبة بأنه نموذج (Model)

طريقة اختيار الاتساق:

اذا وجد نموذج لمجموعة من بديهيات فإن المجموعة تكون منسقة اذا وجد نموذج لمجموعة من بديهيات فإن جميع البديهيات في النظام تكون عبارات صحيحة .

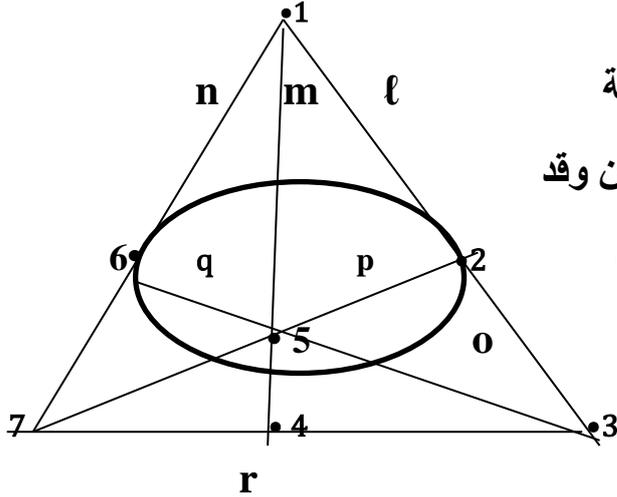
نماذج عن الاتساق:

في التالي سنقدم مجموعة من النماذج تحقق خاصية الاتساق

نموذج (1):

الهندسة الاقليدية الاعتيادية حيث ان الهندسة الاقليدية تعتبر نمودجا يتحقق فيه كل البديهيات المستوى التآلفي .

نموذج (2) :



يقوم صاحب محل صياغة بصنع حلية
مكونة من سبع خرزات مختلفة الالوان وقد
ربطها بسبعة اسلاك بحيث انه توجد
ثلاثة خرزات
في كل سلك
ثلاث اسلاك تمر في كل خرزة

الالوان (الاصفر , الاحمر , البرتقالي , الابيض ,

البنفسجي , السماوي , الاخضر) ان الحلية بدت كما في الشكل أعلاه

في هذا النموذج تفسر الخرزة على انها (نقطة) والسلك على انها (مستقيم)

وفي الجدول ادناه (النقطة) تمثل عدد و (المستقيم) بعمود

ℓ	M	N	o	P	q	R
1	1	1	2	2	3	3
2	5	6	4	5	5	4
3	4	7	6	7	6	7

يبين هذا النموذج ان نظام فانو متسق لانه حقق جميع بديهيات ومبرهنات نظام فانو وهي

1. أي نقطتين مختلفتين في π يحتويهما مستقيم واحد فقط .
2. كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل .
3. يوجد في الاقل نقطة واحدة مثل A ويوجد في الاقل خط واحد مثل ℓ بحيث ان $\ell \notin A$
4. أي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة على الاقل
5. كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط على الاكثر

بديهيه (2) + بديهيه(5) نحصل على [كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط بالضبط]

وجميع هذه البديهيات متحققه في نموذج الحلية والذي هو موضح بالجدول . كما انه جميع
مبرهنات نظام فانو متحققه وهي النموذج يحتوي 7 نقاط (وهي الخرزات) و 7 مستقيمت
وهي (الاسلاك) ونلاحظ من خلال الشكل كل نقطه (خرزه) يمر بيها 3 مستقيمت (أي اسلاك).

-2- الاستقلال (Independence):

تعني الاستقلالية انه لا يوجد بديهية في النظام يمكن برهنتها من بقية البديهيات ففي هذه الحالة يمكن اعتبارها كمبرهنة .

تعريف :- يقال عن عبارة انها مستقلة في مجموعة من عبارات اذا لم نتمكن من اشتقاقها من بقية العبارات في المجموعة .

طريقة اختبار الاستقلال : اذا كانت مجموعة بديهيات متسقة فعندما تبديل العبارة (المراد اختبارها) بنفيها للنظام الجديد نموذج فان العبارة المراد اختبارها تكون مستقلة .

التالي سنقدم مجموعة امثله حول طريقة اختبار الاستقلال عدد من البديهيات :

المثال: (استقلال البديهية (1) في نظام يونك) (مستقيمين و ست نقاط)

ليكن $m = \{4, 5, 6\}$, $l = \{1, 2, 3\}$ بحيث ان m , l مستقيمتان و $1,2,3,4,5,6$ نقاط بديهية (1) : اي نقطتين مختلفتين يحويهما مستقيم واحد فقط .

نفي بديهية (1) [يوجد نقطتين مختلفتين لا يحويهما مستقيم] .

النفي متحقق هنا لان النقطتين 1,4 على سبيل المثال لا يوجد مستقيم يحويهما

البديهية (2) متحققة لان كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط .

البديهية (3) متحققة لانه على سبيل المثال يوجد المستقيم l وتوجد النقطة 4 مثالا تنتمي اليه .

البديهية (4) متحققة لانه اذا اخذنا المستقيم l والنقطة 6 مثالا لا تنتمي اليه فيوجد المستقيم m يمر من النقطة 6 (او يحوي 6) وكذلك m لا يتقاطع مع l اي لا يوجد نقاط مشتركة بينهما ذلك نستنتج بأن بديهية (1) مستقلة .

مثال:- استقلال البديهية (2) : (4 نقاط , 6 مستقيمتان) في المستوى التآلفي

1- البديهية (1) [اي نقطتين يحويهما مستقيم واحد فقط] متحققه

لان النقطتين {2,1} يوجد المستقيم l يحويها وهو الوحيد

والنقطتين {3,1} يوجد المستقيم n يحويها وهو الوحيد

والنقطتين {4,1} يوجد المستقيم p يحويها وهو الوحيد

و النقطتين {3,2} يوجد المستقيم q يحويها وهو الوحيد

و النقطتين {4,2} يوجد المستقيم o يحويها وهو الوحيد

و النقطتين {4,3} يوجد المستقيم m يحويها وهو الوحيد

2- البديهية (2) [كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل]

نفي بديهيه 2] هو يوجد مستقيم لا يحتوي على ثلاث نقاط [وهذه البديهية متحققة لان كل مستقيم يحتوي على نقطتين .

3- البديهية (3) متحققة [يوجد في الاقل مستقيم ونقطة بحيث النقطة لا تنتمي الى المستقيم]

وذلك لان المستقيم l توجد النقطة 3 لا تنتمي اليه .

المستقيم m توجد النقطة 1 لا تنتمي اليه .

المستقيم n توجد النقطة 4 لا تنتمي اليه .

المستقيم o توجد النقطة 3 لا تنتمي اليه .

المستقيم p توجد النقطة 2 لا تنتمي اليه .

المستقيم q توجد النقطة 1 لا تنتمي اليه .

4-البديهية (4) متحققة [من نقطة لا تنتمي الى المستقيم يوجد مستقيم واحد فقط يمر من هذه النقطة ويوازي المستقيم المعلوم] وذلك لان المستقيم

l يمكن رسم موازي واحد له فقط من النقطة 3 هو m ومن 4 هو m

m يمكن رسم موازي واحد له فقط من النقطة 1 هو l ومن 2 هو l

n يمكن رسم موازي واحد له فقط من النقطة 2 هو o ومن 4 هو o .

o يمكن رسم موازي واحد له فقط من النقطة 1 هو n ومن 3 هو n .

p يمكن رسم موازي واحد له فقط من النقطة 2 هو q ومن 3 هو q .

q يمكن رسم موازي واحد له فقط من النقطة 1 هو p ومن 4 هو p .

مثال :- استقلال البديهية (3) : (4 نقاط مستقيم واحد) في المستوي التالفي

ليكن $\ell = \{1,2,3,4\}$

1. البديهية الاولى : متحققة لان النقطتين $\{1,2\}$ يوجد المستقيم ℓ يحويها وهو الوحيد .

النقطتين $\{1,3\}$ يوجد المستقيم ℓ يحويها وهو الوحيد .

النقطتين $\{1,4\}$ يوجد المستقيم ℓ يحويها وهو الوحيد .

النقطتين $\{2,3\}$ يوجد المستقيم ℓ يحويها وهو الوحيد .

النقطتين $\{2,4\}$ يوجد المستقيم ℓ يحويها وهو الوحيد .

النقطتين $\{3,4\}$ يوجد المستقيم ℓ يحويها وهو الوحيد .

2. البديهية الثانية : متحققة لانه المستقيم الوحيد الموجود يحتوي على اربع نقاط .

3. البديهية الثالثة: [توجد في الاقل نقطة واحدة A ويوجد في الاقل خط واحد ℓ بحيث $A \notin \ell$]

نفيها هذه البديهية هو لا توجد نقطة A بحيث ان $A \notin \ell$ وهي متحققة لانه لا توجد نقطة لا تنتمي الى المستقيم ℓ

4. البديهية الرابعة لانه لا يوجد نقطة لا تنتمي الى ℓ اذن البديهية (3) مستقلة .

مثال :- استقلال البديهية (4) في نظام يونك

في نموذج الحليه البديهيات (1) و(2+5) و (3) متحققة

اما البديهية الرابعة (من نقطة لا تنتمي الى المستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر من هذه النقطة ويوازي المستقيم المعلوم .)

نفيها هو (من نقطة لا تنتمي الى المستقيم لا يوجد مستقيم يمر من هذه النقطة

ويوازي المستقيم المعلوم) . أي بمعنى لا توجد خطوط متوازية والنموذج (2) فيه

كل المستقيمتا متقاطعة اذن البديهية (4) متحققة.

ملاحظة :

الاستقلالية هي غير اساسية حيث اذا وجدت احدى البديهيات غير مستقلة أي لانها مبرهنة فبدلا من ان توضع في مجموعة البديهيات توضع في مجموعة المبرهنات .

3. تعريف (التمام Completeness)

يكون النظام البديهي غير تام اذا امكن اضافة بديهية مستقلة اما اذا لم تتمكن من اضافة مثل هذه البديهية فأن النظام يكون تام .

يكون المستوى الاسقاطي غير تاما وكذلك المستوى التآلفي

بينما نظام يونك يكون تاما وكذلك نظام فانو (لماذا ؟) (واجب)

ملاحظة :- التمامية هي خاصية ليست اساسية وبصورة عامة غير مفضلة .