Linear Programming Models

نماذج البرمجة الخطية :-

تعريف البرمجة الخطية :- (LP)

اسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والامكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع افضل نتيجة ممكنة اي ان يكون توزيعها مثالية.

The Components of a Linear Programming

مكونات نموذج البرمجة الخطية

1. Objective Function: دالة الهدف

وتبين هذه الدالة الهدف المنشود والذي نرغب في تحقيقه ويكون الهدف عادة هو الوصول الى أقصى ربح ممكن او اقل كلفة.

2. Constraints or Restrictions: القيود او الشروط

وتشير هذه القيود عادة الى كميات المواد المتاحة او العلاقات الفنية التي توضح ما تحتاجه كل وحدة انتاج من كل مورد من الموارد المتاحة المحدودة.

3. Non-negativity شرط اللاسالبية

ويعني هذا الشرط ان جميع المتغيرات في المشكلة قيد الدراسة لا يمكن ان تكون سالبة بل تكون موجبة او صفرية.

والان سوف نعرض او نتعرف بعض من نماذج البرمجة الخطية

1. Production Model نموذج الانتاج

Descrption of Production Model
الوصف العام لنموذج الانتاج

m: no. of resoures. عدد المصادر الاولية
n : no. of Productions. عدد المواد المنتجة
a_{ij}: The no. of units of resoures i required to produce one unit of productions.
عدد الوحدات الاولية من نوع i المستعملة في انتاج j.

b_i : max. no. of units of resoures i.
اكبر كمية من المواد الاولية من نوع i.

x_j : no. of units of production j.
عدد وحدات النتاج j.
c_j: The profit per unit for Production j
ربح الوحدة الواحدة من النتاج j.

Mathematical Model النموذج الرياضي

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \dots (1)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad , i = 1, \dots, m \quad \dots (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad , \forall j \ (j=1,\dots,n) \quad \dots (3)$$

2. Deit Model نموذج التغذية

Description of Deit Model الوصف العام لنموذج التغذية

m: no. of the important materials that the body required it.

عدد المواد الضرورية التي يحتاجها الكائن الحي.

n: no. of food contains the important materials.

عدد المواد الغذائية المتوفرة فيها المواد الضرورية.

a_{ij}: no. of units of the material i is found in the food j.

عدد الوحدات الضرورية من نوع i الموجودة في المادة الغذائية من نوع j.

b_i: The min. no. of units of material i

اقل عدد من وحدات المادة الضرورية i.

x_j : no. of units of the food j.
عدد الوحدات من المادة الغذائية من نوع j.

c_j : Cost per units for food j.
كلفة الوحدة الواحدة من المادة الغذائية من نوع j.

Mathematical Model النموذج الرياضي

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \dots (1)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad \dots (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \; (j = 1, \dots, n) \quad \dots (3)$$

③ Transportation Model نموذج النقل

الوصف العام

m: no. of origins . عدد المخازن

n : no. of Destinations . عدد المقاصد

a_i: The total amount of available in origin i .

كمية البضاعة المتوفرة في المخزن i .

b_j: The total amount of requried in distination j .

كمية البضاعة المطلوبة من المقصد j .

X_{ij}: The no. of units to be shipped from i to destination j .

عدد وحدات البضاعة المطلوب نقلها من المخزن i الى المقصد j .

C_{ij}: The cost of shipped one from origin i to destinations j

كلفة الوحدة الواحدة من المخزن i الى المقصد j .

Mathematical Model النموذج الرياضي

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad \text{----} \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \,,\ (i=1,\ldots,m) \quad \text{---} \quad (2)$$

كمية البضاعة المتوفرة

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \,,\ (j=1,\ldots,n) \quad \text{---} \quad (3)$$

كمية البضاعة المطلوبة

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad \left(\begin{array}{l} i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n \end{array} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad \text{---} \quad (4)$$

شرط الاتزان

والجدول التالي يوضح النموذج الرياضي

c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	----	c_{1n} x_{1n}	a_1
c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	---	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$				
c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	---	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_1	b_2	...	b_n	$\sum a_i$ / $\sum b_j$

والجدول التالي يوضح النموذج

available

x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}	1
x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}	1
$\vdots$				$\vdots$
x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nn}	1
1	1	$\cdots$	1	

required

ملاحظة: يعتبر نموذج التعيين هو عبارة عن حالة خاصة من نموذج النقل من خلال ملاحظة ان

$$\boxed{n = m = 1}$$

Q// Write the Math. model of the following

2	3	7
4	5	8
10	5	

Sol-

$$Max\ Z = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} c_j x_j$$

s.t.

$$2x_{11} + 3x_{12} = 7$$
$$4x_{21} + 5x_{22} = 8$$

كمية البضاعة المتوفرة available

$$2x_{11} + 4x_{21} = 10$$
$$3x_{12} + 5x_{22} = 5$$

كمية البضاعة المطلوبة required

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = \sum_{j=1}^{2} b_j = 15$$

شرط الاتزان

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2 \quad j = 1,2$$

Assignment Model نموذج التعيين او التخصيص

Suppose we have n persons to be perform n jobs, let the effectiveness of person i to perform job j is C_{ij} $(i=1,\dots,n\ ,\ j=1,\dots,n)$.

let x_{ij} be zero one vararibale defined as:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if person } i \text{ performed } j \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

n: jobs

n: persons

C_{ij}: the effectiveness of the person i to perform job j

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if person } i \text{ performed } j \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

Mathematical Model النموذج الرياضي

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \quad \dots (1)$$

s.t.

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1 \quad , \ i = 1,\dots,n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1 \quad , \ j = 1,\dots,n \end{aligned}\right\} (2)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall\, i, j \quad \text{---} (3)$$

والجدول التالي يوضح النموذج

					available
	x_{11}	x_{12}	....	x_{1n}	1
	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	1
	⋮				⋮
	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	1
required	1	1	...	1	

ملاحظة :- يعتبر نموذج التعيين هو عبارة عن حالة خاصة من نموذج النقل من خلال ملاحظة ان

$$\boxed{n = m = 1}$$

الصيغة العامة لنماذج البرمجة الخطية

من الامثلة السابقة يمكن وضع صيغة عامة لنموذج البرمجة الخطية Linear programming Model تتضمن دالة الهدف والشروط او القيود والشروط اللاسالبة

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \ldots (1)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad , (i=1,\ldots,m) \quad \ldots (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \quad (j=1,\ldots,n) \quad \ldots (3)$$

ويمكن كتابة بالشكل التالي

$$\text{Min } Z = CX \quad \ldots (1)$$

s.t.

$$AX \geq B \quad \ldots (2)$$

$$X \geq 0 \quad \ldots (3)$$

حيث ان

$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n) , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} ,$$

$$A = (a_{ij})_{mn} \quad i=1,\ldots,m , \; j=1,\ldots,n \quad , \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ايضاً يمكن كتابة بالشكل التالي

$$\text{Min } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad \ldots (1)$$

s.t.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\geq b_m \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \ (j = 1, 2, \ldots, n) \quad \ldots (3)$$

ملاحظات هامة في البرمجة الخطية

1- تكون دالة الهدف من نوع تعظيم Max او من نوع تصغير Min .

2. تكون الدالة Z دالة خطية اذا حققت الشروط التاليه

1- $Z(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) = Z(x_1, \ldots, x_n) + Z(y_1, \ldots, y_n)$

2. $rZ(x_1, \ldots, x_n) = Z(rx_1, \ldots, rx_n)$