3- Newton-Raphson iterative method

The Newton-Raphson method is suitable for implementation (تطبيق) on a computer. It is a process for the determination of a real root of an equation $f(x)=0$ given just one point close to the desired root (الجذر المرغوب).

عندما تكون مشتقة الدالة f بسيطة ومن السهل إيجادها فإن الجذور الحقيقية للمعادلة $f(x)=0$ يمكن إيجادها بدقة عالية باستخدام طريقة نيوتن-رافسن

Suppose that $f \in C^2[a,b]$. Let $\bar{x} \in [a,b]$ be an approximation to p such that $f'(\bar{x}) \neq 0$ and $|p-\bar{x}|$ (عن ϵ) is small.

Consider the first Taylor polynomial for $f(x)$ expanded about $\bar{x}$,

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x-\bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x-\bar{x})^2}{2} f''(\xi(x)),$$

where $\xi(x)$ lies between x and $\bar{x}$.

$$0 = f(\bar{x}) + (p-\bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(p-\bar{x})^2}{2} f''(\xi(p))$$

Newton's Raphson method is derived by assuming that since $|p-\bar{x}|$ is small, the term involving $(p-\bar{x})^2$ is much smaller, so

$$0 \simeq f(\bar{x}) + (p-\bar{x})f'(\bar{x}) \Longrightarrow p \simeq \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

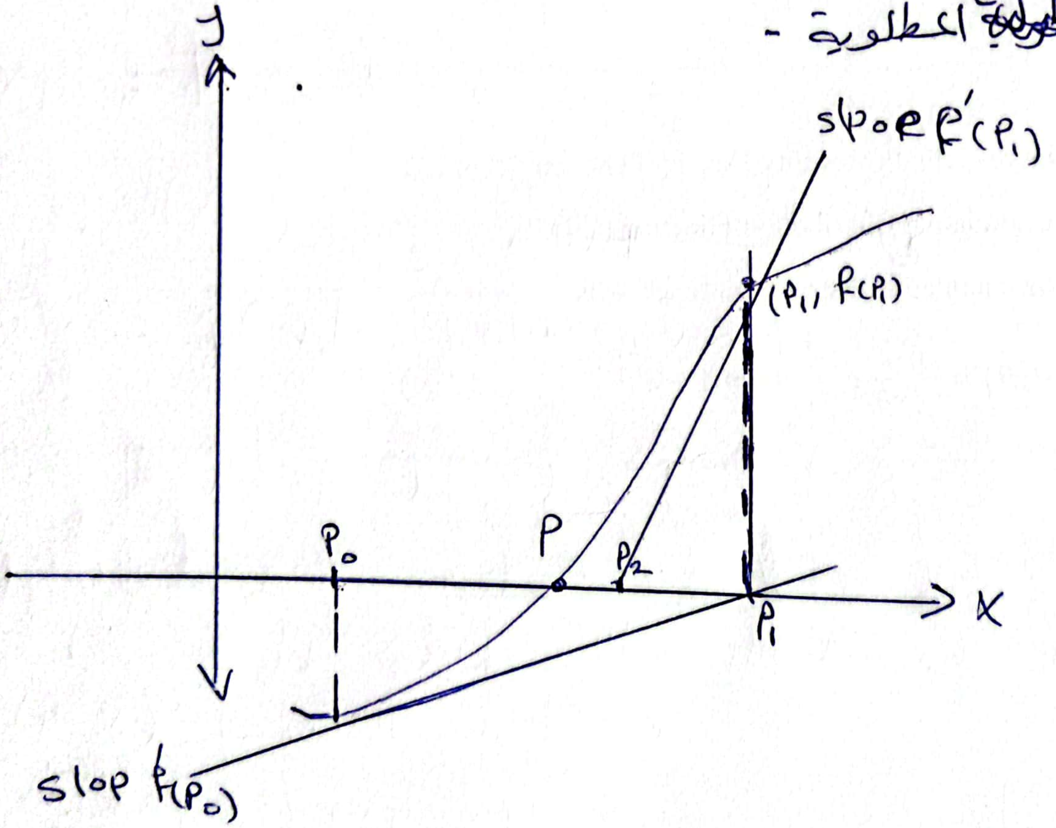
This sets the stage for Newton's–Raphson method, which starts with an initial approximation p_0 and generates the sequences $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ by

$$\boxed{p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \quad \text{for } n \geq 1} \quad (*)$$

خطوات طريقة نيوتن رافسن

① يتم اختيار قيمة تقريبية اولية للجذر وهي p_0 اما عن طريق الرسم للدالة او بالتعويض ببعض قيم x وملاحظة تغير الاشارة للدالة $f(x)$ وكلما كانت القيمة التقريبية الاولية اقرب للجذر (اي كلما كانت دالة $f(p_0)$ قريبة من الصفر) كلما كان ذلك افضل من حيث سرعة الوصول للجذر.

② يتم استخدام القيمة التقريبية الاولية (p_0) لايجاد قيمة تقريبية ثانية p_1 ونستخدم القيمة الثانية لايجاد قيمة ثالثة (p_2) وهكذا باستخدام الصيغة (*) يتم تكرار الخطوة ② لحين الوصول الى الدقة ~~المطلوبة~~ المطلوبة -



Theorem let $f \in C^2[a,b]$. If $p \in [a,b]$ is such that ③
$f(p)=0$ and $f'(p) \neq 0$, Then there exists $\delta > 0$ such that
Newton's method generates a sequence $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ converging
to P for any initial approximation $P_0 \in [P-\delta, P+\delta]$.

Ex Find the root of the equation $e^{-x}=x$ using
Newton-Raphson method correct to four decimal
المنزلة
places given the initial guess $P_0 = 1$, $\epsilon = 0.005$
تخمين أولي
المنازل

Solution let $f(x) = e^{-x} - x \longrightarrow f'(x) = -e^{-x} - 1$

From Newton iteration formula gives.

$$P_{n+1} = P_n - \frac{f(P_n)}{f'(P_n)} \longrightarrow P_{n+1} = P_n - \frac{(e^{-P_n} - P_n)}{(-e^{-P_n} - 1)} \Rightarrow P_{n+1} = P_n + \frac{e^{-P_n} - P_n}{e^{-P_n} + 1}$$

$$P_{n+1} = \frac{P_n(e^{-P_n}+1) + e^{-P_n} - P_n}{e^{-P_n}+1} = \frac{P_n e^{-P_n} \cancel{+P_n} + e^{-P_n} \cancel{-P_n}}{e^{-P_n}+1}$$

$$\therefore P_{n+1} = \frac{(P_n+1)e^{-P_n}}{e^{-P_n}+1}$$

If $n=0 \longrightarrow P_1 = \frac{(P_0+1)e^{-P_0}}{e^{-P_0}+1} = \frac{(1+1)e^{-1}}{e^{-1}+1} = \frac{2e^{-1}}{e^{-1}+1} = 0.5379$

If $n=1 \longrightarrow P_2 = \frac{(P_1+1)e^{-P_1}}{e^{-P_1}+1} = \frac{(0.5379+1)e^{-0.5379}}{e^{-0.5379}+1} = 0.5670$

If $n=2 \longrightarrow P_3 = \frac{(P_2+1)e^{-P_2}}{e^{-P_2}+1} = \frac{(0.5670+1)}{(e^{-0.5670}+1)} \rightarrow \boxed{P_3 = 0.5671}$ الجذر

متقاربة

$\therefore |P_3 - P_2| = |0.5671 - 0.5670| = 0.0001 < 0.005 = \epsilon$

Secant Method طريقة القاطع

To find a solution to $f(x)=0$ given initial approximations (two root) p_0 & p_1

Further approximations $p_2, p_3, ---$ computed from

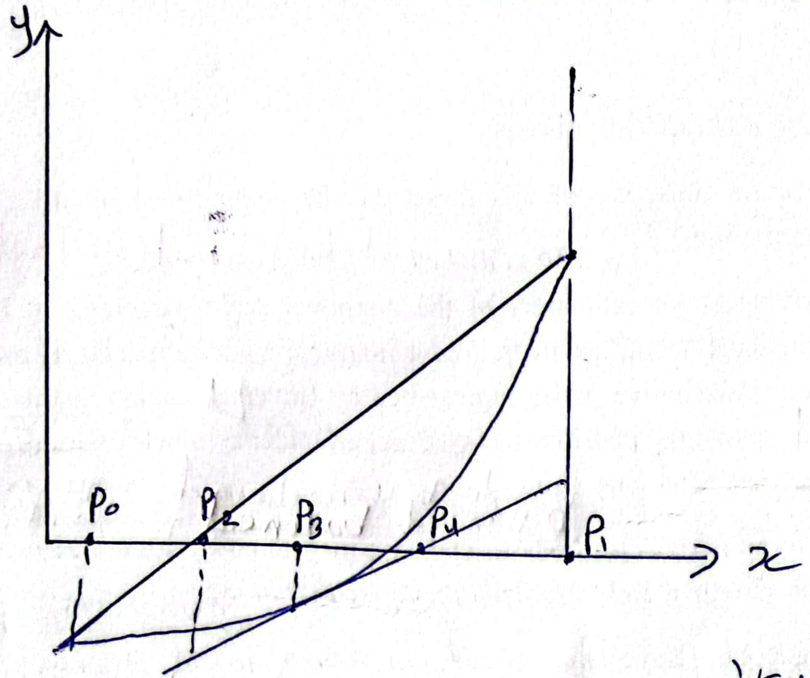
$$\boxed{p_{n+1} = p_n - f(p_n)\,\frac{p_n - p_{n-1}}{f(p_n) - f(p_{n-1})}} \quad (*)$$

Secant method.

ملاحظة تستخدم في حالة وجود مشتقات او دوال غير قابلة للاشتقاق او تكون مشتقاتها طويلة ومعقدة وهي طريقة بديلة او محورة عن طريقة (N-R) مثلاً

$$f(x) = x^2\, 5^x \cos 2x$$

$$f'(x) = 2x \cdot 5^x \cos 2x + x^2\, 5^x \ln 5 \cos 2x + x^2\, 5^x(-2\sin 2x)$$



خوارزمية طريقة القاطع

1. يتم اختيار قيمتان للجذر المطلوب ايجاده وهما (p_0, p_1) ولا يهم اشارة دالتيهما.
2. يتم استخدام القيمتان اعلاه لايجاد قيمة تقريبية افضل للجذر وهي p_2 ثم تستخدم القيمة الاخيرة مع القيمة السابقة p_1 لايجاد قيمة تقريبية افضل وهي p_3 وهكذا باستخدام القانون (*)
3. يتم الاستمرار بتكرار الخطوة (2) الى حين الوصول الى الدقة المطلوبة.

X) Use the secant method to find a solution to $x=\cos x$ with initial approximation $P_0=0.5$, $P_1=\frac{\pi}{4}$ ⑤

Solution $f(x)=\cos x-x$

$P_0=0.5$, $P_1=\frac{\pi}{4}=0.7853981635$

$$P_2=P_1-f(P_1)\frac{P_1-P_0}{f(P_1)-f(P_0)}$$

$$=0.7853981635-f(\tfrac{\pi}{4})\frac{(\frac{\pi}{4})-0.5}{f(\frac{\pi}{4})-f(0.5)}$$

n	P_n
0	$0.5=P_0$
1	$0.7853981635=P_1$
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390851493
5	0.7390851332

دول اخر تكاراتين المتساويين

للتوقف $\in$ او يذكر عدد Iterators n اما يذكر

H.W Find the root of the equation $e^{-x}=x$ using the secant method with initial $P_0=0$ & $P_1=1$

5- False-position Method طريقة الموضع الكاذب

The method false-position is to found to be an effective alternative to solving the equation $f(x)=0$ for a real root between a & b, given that $f(x)$ is continuous and $f(a)$ & $f(b)$ opposite signs. عكس

To implement (تطبيق) the method observe that the curve $y=f(x)$ is not generally a straite line. خط مستقيم

However, one may join the points $(a,f(a))$ and $(b,f(b))$ by the straight line
اكذا مستقيم

نفرض ان نقطة المستقيم الواصل بين النقطتين $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$
تقطع المحور x في p وعليه تكون معادلة المستقيم

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

The straight line cut the x-axis at $(p, 0)$ where
وعند ما نفرض $y=0$ نحصل على الصيغة

$$\frac{0 - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{p - a}{b - a}$$

so that

$$p - a = -\frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

$$p = a - f(a)\frac{b-a}{f(b) - f(a)}$$ بالتبسيط

$$p = \frac{a f(b) - \cancel{a f(a)} - b f(a) + \cancel{a f(a)}}{f(b) - f(a)}$$

$$\boxed{p = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}}$$

Now let us assume that $f(a)$ is negative and $f(b)$ is positive There are three possiblitres

(i) $f(p) = 0$, in which case p is the root.
(ii) $f(p) < 0$, in which case the root lies between p and b
(iii) $f(p) > 0$, in which case the root lies between p and a

$$P_n = \frac{P_{n-2} f(P_{n-1}) - P_{n-1} f(P_{n-2})}{f(P_{n-1}) - f(P_{n-2})}$$

نتحقق اولاً بحساب P_n وبيان اختلاف اشارتها مع P_{n-2}, P_{n-1}

فاذا كان $f(P_n) f(P_{n-2}) < 0$ فان الجذر يقع بين P_n, P_{n-2} وبخلاف

ذلك فان الجذر يقع بين $f(P_n), f(P_{n-1})$

Ex) Use The method false position to find asolution to equation $f(x) = \cos x - x$ with initial approximation $P_0 = 0.5$ & $P_1 = \frac{\pi}{4}$

Solution

$P_0 = 0.5 \longrightarrow f(P_0) = \cos 0.5 - 0.5 = 0.377582561$ (+)

$P_1 = \frac{\pi}{4} \longrightarrow f(P_1) = f(\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -0.0782913822$ (−)

$$P_2 = \frac{P_0 f(P_1) - P_1 f(P_0)}{f(P_1) - f(P_0)} = 0.7363841388$$

$f(P_2) = \cos P_2 - P_2 = 0.004517186 > 0$ (+) موجبة

$[P_0, P_1]$ (a, b)

$f(P_0) = f(a) = +$

$[P_2, P_1]$

$f(P_1) = f(b) = -$

$f(P_2) = +$ اذا كانت سالبة $[P_0, P_2]$ الفترة

$f(P_2) \cdot f(P_0) = + > 0$ لا يوجد جذر

$f(P_2) \cdot f(P_1) = - < 0$ يوجد جذر $[P_0, P_1]$ فقط نستبدل

$[P_2, P_1]$ P_0 بـ P_2

نبقي P_1

بنفس الامكان

$$P_3 = \frac{P_2 f(P_1) - P_1 f(P_2)}{f(P_1) - f(P_2)}$$