نماذج النقل
Transportion Models

1 ـ 4 المقدمة

سوف نتناول في هذا الفصل احدى تطبيقات البرامج الخطية الا وهو نموذج النقل (نموذج التوزيع) يبحث هذا النموذج في ايجاد القيمة الصغرى لكلفة نقل البضاعة من عدة مصادر للعرض Sourcer والتي قد تمثل المراكز الانتاجية أو التسويقية او المصانع التي تنقل منها البضاعة الى عدد من محطات الطلب او مراكز الاستهلاك Destination .

إن الكميات المعروضة عند كل مصدر والكميات المطلوبة في كل موقع يفترض ان تكون معلومة وعلى سبيل المثال المنتج ربما ينقل من المصانع التي تمثل المصادر هنا الى المخازن المركزية (المواقع) .

بالامكان تحليل مسألة النقل (لتحديد الكميات المثلى التي ستنقل من المصادر الى المواقع باقل كلفة نقل ممكنة باستخدام الطريقة العامة المطبقة عند تحليل مسائل البرمجة الخطية (طريقة السمبلكس Simplex Method ولكن نظراً لطبيعة مسألة النقل الخاصة فقد طورت طرق جديدة لها ميزات خاصة تجعلها ملائمة عند التحليل بشكل افضل من طريقة السمبلكس وان هذا الأسلوب الجديد في التحليل يختلف عن طريقة السمبلكس في معالجة الرياضية للمسألة لكنه من حيث المبدأ يلتقي معها تماماً باعتباره يبدأ باختيار الحل الاساسي الابتدائي المقبول S.B.F.S
Starting Basic Feasiblesolution

ومن ثم يطور هذا الحل للوصول الى الحل الامثل الذي تكون عنده قيمة دالة الكلفة (دالة الهدف) في نهايتها الصغرى . وسوف نبين في الفقرة التالية التعريف الرياضي العام لنموذج النقل

2 ـ 4 تعريف النموذج Definition of the Model

يتضمن نموذج النقل m من مصادر التجهيز ، n من محطات (الاستهلاك الطلب اضافة الى ذلك نفترض ان .

a_i، يمثل عدد الوحدات المعروضة عند المصدر من حيث $(i = 1, 2, \ldots, m)$

b_j، عدد الوحدات المطلوبة بالبينة للموقع j حيث $(j = 1, 2, \ldots n)$

c_{ij} ، كلفة نقل الوحدة الواحدة من البضاعة من المصدر i الى الموقع j

X_{ij} عدد الوحدات التي ستنقل من المصدر i الى الموقع j والجدول الاتي يعرض الصورة الجدولية العامة لنموذج النقل

n
for i = 1 to n+1
for j = 1 to n+1
x[i

Destinations

T_0 From	1	2	j …	n	Supply العرض
1	C_{u} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{ii} X_{ij}	C_{1n} X_{in}	a_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22}	C_{2j} X_{2j}	C_{2n} X_{2n}	a_2
3	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{3j} X_{3j}	C_{3n} X_{3j}	a_3
⋮	⋮				⋮

i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	…	X_{ij}	C_{in} X_{in}	a_i
⋮						⋮
m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}		C_{m3} X_{m3}	C_{mn} X_{mn}	a_m
demand	b_1	b_2		b_j	b_n	

والطلب

اتضح لنا ان الهدف من تحليل نموذج النقل هو تحديد العدد الامثل من الوحدات التي ستنقل من المصدر i الى الموقع j باقل كلفة ممكنة c اعتماداً على هذا الهدف ، يمكننا كتابة نموذج البرمجة الخطية المكافيء لنموذج النقل بالشكل التالي

$$\text{Minimize } X_0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

طبقاً الى

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

$$X_{ij} \geq 0$$

ولتسهيل دراسية مشكلة النقل تعرض الصورة الجدولية التالية التي تمثل نموذج نقل مبسطة من $n = 3, m = 2$

جدول رقم 2

T_0 From	1	2	3	الكمية المعروضة Supply
المصادر	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	a_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	a_2
المطلوبة Demand	b_1	b_2	b_3	

حيث تمثل C_{11} كلفة نقل الوحدة الواحدة من البضاعة من المصدر الاول الى الموقع الاول وكذلك C_{23} تمثل كلفة نقل الواحدة من المصدر الثاني الى الموقع الثالث وهكذا اما X_{12} فتمثل عدد الوحدات التي ستنقل من المصدر قيم الى الموقع 2 وعلى نفس الاساس تعرف بقية قيم X_{ij}

من الجدول 2 يتضح ان الكمية المنقولة من المصدر الاول الى المواقع الثلاثة يجب ان لاتزيد على الكمية المعروضة (a_1) اي ان

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq a_1$$

وكذلك

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq a_2$$

اضافة الى ذلك فان مجموع الكمية المنقولة الى المصدر الاول يجب ان لاتقل عن احتياج ذلك الموقع وهي b_1 . بعبارة اخرى ، يجب ان يكون

$$X_{11} + X_{21} \geq b_1$$
$$X_{12} + X_{22} \geq b_2$$
$$X_{13} + X_{23} \geq b_3$$

اما دالة كلفة النقل الكلية (دالة الهدف) فستكون

$$X_0 = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23}$$

واستناداً الى ماورد سابقاً يمكننا اختصار تعريف مشكلة النقل بالصورة العامة التالية ،
استخرج قيمة X_0 الصغرى حيث

$$X_0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

وفقاً الى مجموعة القيود

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq a_i \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq b_j \qquad j = 1, 2 \ldots n$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j)$$

ولو قارنا هذه الصيغة مع الصيغة العامة للبرمجة الخطية نلاحظ ان دالة الهدف والقيود تمثل صيغاً من صيغة البرمجة الخطية لذلك نجد من الممكن استخدام الطريقة العامة المطبقة عند تحليل البرامج الخطية (طريقة السمبلكس)
لايجاد الحلول المطلوبة لمشكلات النقل ويتم هذا بتحويل قيود المتباينات المشار اليها اعلاه الى قيود مساواة (معادلات كما ذكرنا ذلك في البند 2 ـ 4 .

3 ـ 4 موازنة نموذج النقل **Balancing of T.Model**

ينتج من التعريف العام لنموذج النقل ان

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i$$

وهذا يعني ان الكمية المعروضة في جميع المصادر يجب ان تساوي الكمية المطلوبة عند كل المواقع ولكن هذا الشرط بالنسبة للمواقع العملي ويعتبر شرط افتراضي

5 ـ 4 ايجاد الحل الاساسي الابتدائي المقبول .S.B.F.S

يتطلب التعريف العام لنموذج النقل ان تكون الكمية المعروضة مساوية للكمية المطلوبة $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$ كما اشرنا الى ذلك سابقاً ، ومن هذا ينتج ان :

نموذج النقل سيتضمن معادلة واحدة معتمدة والمعادلات الباقية تعتبر مستقلة وهذا يعني ان . S. B. F. S يتكون من $(m+n-1)$ من المتغيرات الاساسية والتي عددها $mn-(m+n-1)$ فهي غير اساسية (أي ان قيمتها تساوي صفر) توجد ثلاث طرق تستخدم لتحديد الـ S. B. F. S وهي على الترتيب :

1 ـ طريقة الركن الشمالي الغربي Northwest – Corner Method

2 ـ طريقة اقل كلفة ممكنة Least Cost Method

3 ـ طريقة فوجل Vogel's Approximation Method (VAM)

(٤٠)

٥٦

5 ـ 4 ـ 1 ـ طريقة الركن الشمالي الغربي

في هذه الطريقة نبدأ بتخصيص اكبر كمية ممنكة للمتغير الواقع في الركن الشمالي الغربي ، اي المتغير x_{11} ، وحسب الاسلوب الاتي :

1 ـ اذا كانت $b_1 > a_1$ تخصص الكمية a_1 للمتغير x_{11} . ثم تحذف الصف الاول لان مجموعه اصبح صفر ونعدل مجموع العمود الاول ثم نأخذ الخلية x_{21} وتخصص قيمة للمتغير x_{21} على ضوء الكمية المعروضة في المصدر الثاني والكمية المطلوبة في الموقع الاول .

2 ـ اذا كانت $b_1 < a_1$ نخصص الكمية b_1 للمتغير x_{11} ونحذف العمود الاول ونعدل مجموعه الصف الاول ، ثم نستمر بالتخصيص ابتداءاً بالمتغير الاخر x_{12}

3 ـ اما اذا كانت الكمية $a_1 = b_1$ عندئذ نضع x_{11} مساوٍ لاحدهما وفي هذه الحالة سيصبح مجموعة الصف الاول صفر وكذلك العمود الاول صفراً . لذلك نأخذ المتغير x_{22} ونخصص له قيمة على ضوء الكمية المعروضة في الصف الثاني والكمية المطلوبة في الموقع الاول .

4 ـ نستمر باشغال المربعات حسب الكميات المعروضة في الصف والكميات المطلوبة في العمود الى ان نحقق العدد (m + n − 1) من المتغيرات الموجية .

5 ـ في حالة عدم تحقق العدد (m+n−1)من المتغيرات الموجبة سيكون الحل Degenerate Solution ، لذلك نكمل هذا العدد باعتبار بعض المتغيرات الغير اساسية والتي لها كلفة نقل اقل مايمكن c متغيرات اساسية بقيمة تساوي صفر .

مثال رقم 1 استخرج الحل الاساسي الابتدائي المقبول لنموذج النقل الاتي :

جدول رقم 3

From / To	1	2	3	4	a_i
1	10	0	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	0	14	16	18	5
b_j	5	15	15	10	45

الحل : نلاحظ ان النموذج متوازن لان $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 45$

نبدأ بتحديد قيمة المتغير x_{11} $(a_1 = 15 , b_1 = 5, b_1 < a_1)$ لذلك نخصص قيمة b_1 للمتغير x_{11} ونحذف العمود الاول ونعدل مجموع الصف الاول الى عشرة، ثم تستمر افقياً اي نأخذ المتغير x_{12} $(a_1 = 10 b_2 = 15, a_1 < b_2)$ وعليه تكون قيمة x_{12} تساوي 10 ، بعد ذلك ننتقل للمتغير x_{22} ونخصص له قيمة تساوي 15 ، بعد ذلك نخصص للمتغير x_{34} والجدول الاتي يلخص هذه الخطوات ،

جدول رقم 4

5	10			$15 - 10 - 0 \rightarrow 0$
	5	15	5	$25 - 20 - 5 - 0$
			5	5 0
5	15 5 0	15	10 5 0	

وبهذا يصبح عدد المتغيرات الاساسية (الموجبة) التي تكون الحل الاساسي الابتدائي المقبول ستة متغيرات حسب القاعدة $(m + n - 1)$ وهي على الترتيب .

$x_{11} = 5 \; x_{12} = 10 \; x_{22} = 5 \; x_{23} = 15 \; x_{24} = 5$
$x_{34} = 5$

واعتماداً على هذه القيم تكون قيمة

$$x_0 = 5(10) + 10(0) + 5(7) + 15(9) + 5(20) + 5(18) = 410$$

واخيراً لا بد من القول فان طريقة الركن الشمالي الغربي تحقق العدد المناسب من المتغيرات الاساسية الموجبة $(m+n-1)$ ولكنها لاتستند على مبدأ علمي عند

توزيع الكميات المعروضة على مواقع الطلب وبهذا فهي لن تحقق التوزيع الكفوء الذي يخفض التكاليف ، اضافة الى انها تتطلب حسابات تكرارية مطولة عند اختبار S. B. F. S للحصول على الحل الامثل .

5 ـ 4 ـ 2 ـ طريقة اقل كلفة ممكنة

يتم توزيع الكميات المعروضة على المطلوبة حسب اقل كلفة نقل ممكنة . يتطلب هذا استعراض جدول التكاليف وتحديد اصغر كلفة نقل ممكنة عندئذ نخصص قيمة لهذا المتغير على ضوء الكمية المعروضة في الصف والكمية المطلوبة في العمود (اي الصف والعمود اللذان يحددان موقع هذا المتغير) .

بعد ذلك نحدد اصغر كلفة ممكنة اخرى ونخصص قيمة لهذا المتغير وهكذا سنستمر الى ان يتم توزيع كافة الوحدات المعروضة على المطلوبة :
ويجب ان نلاحظ انه عندما تتساوى اصغر كلفتين في الجدول فان الاختيار بينهما يكون عشوائياً . وفيما يلي مثال توضيحي لهذه الطريقة :

مثال رقم 2

استخراج الحل الاساسي الابتدائي المقبول لنموذج النقل الاتي حسب طريقة اقل كلفة ممكنة :

جدول رقم 5

From / To	1	2	3	a_i
1	1	2	6	7
2	0	4	2	12
3	3	1	5	11
b_j	10	10	10	30

الحل : نلاحظ اولاً ان النموذج متوازن بعد استعراض جدول الكلف نجد ان ($c_{21} = 0$) هي اصغر كلفة ـ ممكنة ، لذلك سنخصص قيمة للمتغير x_{21} (قيمة تساوي b_1 لان $b_1 < a_2$) بعد حذف العمود الاول لان مجموعه اصبح صفراً ، نجد ان اصغر كلفة اخرى هي $c_{32} = 1$ وعليه نخصص قيمة للمتغير x_{32} قيمة تساوي 10 لان $b_2 < a_2$) بعد هذا تحذف العمود الثاني ، ثم نخصص قيمة للمتغير x_{23} (قيمة تساوي 2 لان $a_2 < b_3$ ، بعد تعديل مجموع العمود الثالث نخصص قيمة للمتغير x_{33} (قيمة = 1) واخيراً ستكون قيمة المتغير ـ x_{13} مساوية للوحدات السبعة المتبقية والجدول التالي يلخص هذه الحسابات .

جدول رقم 6

1	2	6 7	7 0
0 10	4	2 2	12 2 0
3	1 10	5 1	11 1 0
10 0	10 0	10 8 7 0	

من الجدول رقم 6 يتضح ان المتغيرات التي تكون S.B.F.S. هي

$x_{13} = 9 \qquad x_{21} = 10 \qquad x_{23} = 2$

$x_{32} = 10 \qquad x_{33} = 1$

وقيمة دالة الهدف ستكون

$x_0 = 7(6) + 10(0) + 2(2) + 10(1) + 1(5) = 61$ units

Penalty cost

4 ـ 4 ـ 3 طريقة فوجل VAM

تعتبر طريقة فوجل افضل من الطريقتين الاولى والثانية (طريقة الركن الشمالي الغربي وطريقة اقل كلفة ممكنة) عند استخراج S. B. F. S لما تميز به هذه الطريقة من ميزات تمكننا من الحصول على الحل الامثل لنموذج النقل بصورة مباشرة او بعد تطبيق عدد صغير جداً من الدورات الخاصة بالحسابات التكرارية .

ونعرض فيما يلي الخطوات الاساسي لهذه الطريقة :

1 ـ حساب الفرق بين اصغر كلفتين من كل صف ومن كل عمود من جدول التكاليف ويسمى هذا الفرق بكلفة الجزاء Penaltycost

2 ـ نختار الفرق الاكبر من بين تكاليف الجزاء للصفوف والاعمدة على السواء وفي حالة تساوي بعض الفروق نختار الصف او العمود المناظر لأعلى فرق عشوائياً .

3 ـ بعد تحديد الصف او العمود المناظر الاكبر فرق نخصص قيمة للمتغير الذي تكون كلفة نقله اقل مايمكن في ذلك الصف والعمود او تكون الكمية المخصصة هي اكبر كمية متاحة لتسديد حاجة الموقع المعني

4 ـ نحذف الصف او العمود الذي اصبح مجموعة صفراً اي الذي تم تحقيقه .

5 ـ نكرر الخطوات الاربعة اعلاه ونستمر الى ان نوزع جميع الوحدات المعروضة على الوحدات المطلوبة .

وفيما يلي تطبيق لهذه الطريقة على المثال رقم 2 .

حيث تم تخصيص اكبر كمية متوفرة في المصدر الثاني للمتغير x_{23} بعد ذلك نخذف العمود الثالث لان مجموعه اصبح صفراً .

والان نكرر حساب الفروق للصفوف والاعمدة المتبقية ونختار الصف الثاني المقابل لاكبر فرق وهو 4 ونخصص قيمة للمتغير x_{21} وهذا الى ان نحصل على الحل الاساسي الابتدائي المقبول بالرغم من ان استخراج S. B. F. S بطريقة فوجل يتطلب في بداية الامر بعض الخطوات الحساسة لكن هذا لا يهم مادام يوفر لنا الحل المطلوب والذي يحقق الحل الامثل باقصر عدد ممكن من الخطوات الحسابية .

ويتضح لنا من الجدول رقم 7 ان الحل الاساسي الابتدائي المقبول هو :

$$x_{11} = 7$$
$$x_{21} = 2$$
$$x_{31} = 1$$
$$x_{23} = 10$$
$$x_{32} = 10$$

III 10 4

جدول رقم 7

From / To	1	2	3	a_i	كلفة الجزاء للصفوف
1	[1] 7	[2] 0	[6]	7 0	1 1 1
2	[0] 2	[4] 0	[2] 10	12 0	2 4 –
3	[3] 1	[1] 10	[5] 0	11 1	2 2 2
b_j	10 8 7 1	10 0	10 10 0		
كلفة الجزاء للاعمدة	1 1 2	1 1 1	3 – –		