محاضرة رقم (9)

Interpolation الاستداخ

حيث (Interpolation) لايجاد قيم وسطية في جداول البيانات ذات دقة متناهية (خالية من الاخطاء) وذلك عن طريق ايجاد معادلة بمقدرة العدد التي تمر بجميع النقاط ومن ثم ايجاد اي قيمة مجهولة غير موجودة في جدول البيانات.

Lagrange interpolating polynomial

(متعددة الحدود لاكرانج للاستكمال)

يمكن استخدام هذه الطريقة في استكمال اي نوع من البيانات وبغض النظر عن غير المتغير المستقل X.

نفرض ان لدينا مجموعة من النقاط وهي $(x_0,y_0), (x_1,y_1), \dots, (x_n,y_n)$ فأن هناك متعددة الحدود تمر بجميع النقاط اعلاه وتكون من الدرجة (n) اي ان درجة متعددة الحدود اقل من عدد النقاط بواحد وتكتب بالصيغة التالية

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i \quad \text{general formula}$$

(صيغة عامة)

$$= L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1 + \dots + L_n(x)\, y_n$$

$$\text{where } L_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Π : product of حاصل الضرب

في حالة وجود نقطتان مثل هذه النقاط (x_1,y_1) و (x_0,y_0) فأن $n=1$ اي ان متعددة الحدود من الدرجة الاولى (خط مستقيم)

وتكتب كالاتي:

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$P_1(x) = \underbrace{\frac{x-x_1}{x_0-x_1}}_{L_0(x)} y_0 + \underbrace{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}}_{L_1(x)} y_1$$

نأخذ i
الأقل قيمة و لا
$L_0(x)$ الكبيرة

اما في حالة وجود ثلاث نقاط سمّا
(x_0, y_0) ، (x_1, y_1) ، (x_2, y_2)
فان $(n=2)$ اي انه سيعدة حدود تكون من الدرجة الثانية
وتكتب كالاتي

$$P_2(x) = \underbrace{\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}}_{L_0(x)} y_0 + \underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}}_{L_1(x)} y_2 + \underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}}_{L_2(x_2}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} y_i$$

وتكتب بالصيغة العامة للحالات التي
عدد الحدود النقاط (Not

EX) Use Lagrange Interpolating Polynomial to estimate $y(1.22)$

If $y(1.3) = 0.4032$ and $y(1.2) = 0.3849$
(x_1, y_1) (x_0, y_0)

Solution

$x_0 = 1.2$, $y_0 = 0.3849$

$x_1 = 1.3$, $y_1 = 0.4032$

$x = 1.22$, $y = ?$

$$P_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1$$

$$P_1(1.22) = \frac{1.22-1.3}{1.2-1.3}(0.3849) + \frac{1.22-1.2}{1.3-1.2} 0.4032$$

$$= 0.3885 = y$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Ex) Use The following data to determine y at $X=3$ by Lagrange interpolating polynomial

i	0	1	2
x	2^{x_0}	2.5^{x_1}	4^{x_2}
y	0.5	0.4	0.25
	y_0	y_1	y_2

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

$$P_2(3) = \frac{(3-2.5)(3-4)}{(2-2.5)(2-4)}(0.5) + \frac{(3-2)(3-4)}{(2.5-2)(2.5-4)}(0.4) +$$

$$\frac{(3-2)(3-2.5)}{(4-2)(4-2.5)}(0.25) = \boxed{0.325}$$

Example Determine The interpolating polynomial For the given data by Lagrange interpolating polynomial and then estimate $y(-1), y(0), y(1), y(2), y(3), y(4)$

i	0	1	2
x	-2 (x_0)	-1 (x_1)	2.5 (x_2)
y	0.7 (y_0)	-1 (y_1)	2.5 (y_2)

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{(x-1.5)(x-6)}{(-2-1.5)(-2-6)}0.7 + \frac{(x+2)(x-6)}{(1.5+2)(1.5-6)}(-1) + \frac{(x+2)(x-1.5)}{(6+2)(6-1.5)}($$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$= 0.625(x^2 - 7.5x + 9) + 0.0635(x^2 - 4x - 12) + 0.0694(x^2 + 0.5x - 3)$$

$$P_2(x) = 0.1579x^2 - 0.4068x - 0.7452$$

ولتحقق من صحة حل المعادلة الا ستكمالية اعلاه يتم تعويض بعض قيم (x) المعطاة في جدول البيانات فاذا كانت الناتج للدالة ذات قيمة مساوية لقيمة (y) المعطاة في الجدول البيانات فالمعادلة صحيحة .

$$P_2(-2) = 0.1579(-2)^2 - 0.4068(-2) - 0.7452$$
$$= 0.6996 = 0.7$$

المعادلة صحيحة ::

$$y(-1) = 0.1579(-1)^2 - 0.4068(-1) - 0.7452$$
$$= -0.1805$$

$$y(0) = -0.1805$$

$$y(1) = -0.9941$$

$$y(2) = -0.9272$$

$$y(3) = -0.5445$$

$$y(4) = 1.1683.$$

H-w Use Lag. Inter. poly. to estimate $y(3)$ given the following data

i	0	1	2	3
x	-1	1	2	5
y	2	4	-1	32

Hint Find $P_3(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 + L_3(x)y_3$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner