تعريف مصطلحات الاساسية

1. البرمجة الخطية (Linear Programming) (LP) : عبارة عن االنموذج رياضي يبحث عن تعظيم او تقليل دالة هدف خطية تخضع الى مجموعة من القيود الخطية.
2. المتغير الوهمي او المتمم (Slack variable) : المتغير المضاف الى الطرف الايسر من القيد، ويتم تحويل المتباينة من اقل من او يساوي الى الى معادلة.
3. القيد (Constraint) : معادلة او متباينة تحدد قيم متغيرات القرار.
4. الحل (Solution) : اي مدى من قيم المتغيرات.
5. الحل المقبول (Feasible Solution) : هو حل يحقق كافة او جميع القيود
6. الحل الأمثل (Optimal Solution) (O.S) : هو الحل المقبول "أي الحل الذي يحقق كافة القيود" فضلاً عن جعله قيمة دالة الهدف في نهايتها العظمى او الضغرى.
7. القيد الفائض (Redundant constraint) : قيد لايؤثر على المنطقة المقبولة اي عند ازالته من الانموذج لايؤثر على الحل او المنطقة المقبولة.
8. تعدد الحل الأمثل (Alternative optimal solution) : عندما يكون اكثر من حل واحد يعطي القيمة المثلى لدالة الهدف.
9. حل غير محدود (Unbounded) : تحدث هذه الحالة عندما تكون منطقة الحل الممكن مفتوحة من إحدى الجهات، و لايمكن أن نحدد الحل الأمثل للمسألة ، من الناحية الإقتصادية نلاحظ أن هذه الحالة هي حالة غير واقعية، لأنه ليس هناك مؤسسة لا تواجه حالة محدودية الموارد فالموارد المتاحة دوماً محددة، لذلك فأن صادفنا مثل هذه الحالة فذلك يعني أن المسألة البرمجة الخطية قد تم صياغتها بشكل خاطئ أو هناك نقص في القيود.

الممسوحه ضوئيا بـ CamScanner

10. الحل غير مقبول (Infeasibility) : يكون الحل غير مقبول عندما تحتوي مسألة البرمجة الخطية بعض القيود المتعارضة وفي مثل هذه الحالة يكون من المستحيل تحديد منطقة الحل الممكنة، وهذا يعني وجود حل لمسألة البرمجة الخطية .

الصيغة القانونية : (Canonical form)

الشكل العام للصيغة القتنونية بالشكل الاتي :

$$max. \quad Z = \sum_{j=1} C_j X_j \quad objective\ function$$

$$S.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i \qquad constra\ ints$$

$$X_i \geq 0$$

هذه الصيغة تمتاز بالخصائص الآتية :

أ. جميع متغيرات القرار تكون غير سالبة ($X_j \geq 0$).

ب. جميع القيود تكون من نوع أصغر أو يساوي ($\leq$).

ج. دالة الهدف من نوع تعظيم (maximized) فقط.

يمكن تحويل الصيغة العامة إلى الصيغة القانونية باستعمال القواعد الاتية :

1. دالة الهدف من نوع تعظيم Max فقط، ويتم تحويل دالة الهدف من نوع تصغير(minimized) تعظيم (maximized)من خلال ضرب الدالة بسالب واحد (−1) اي ان Max z = Min(−z)

2. القيود من نوع اقل اويساوي، ويتم تحويل القيد من نوع أكبر أو يساويإلى أصغر أو يساوي من خلال ه المتباينة بسالب واحد.

$$\sum a_{ij} X_j \geq \Leftrightarrow -\sum a_{ij} X_j \leq -b_i$$

الممسوحه ضوئيا بـ CamScanner

3. قيد المساواة (=) يتحول إلى قيدين من نوع أصغر واكبر ومن ثم تحويل القيد من نوع اكبر الى اصغر او يساوي.

$$\sum a_{ij}X_j = b_i \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sum a_{ij}X_j \leq b_i \\ -\sum a_{ij}X_j \leq -b_i \end{Bmatrix}$$

4. تحويل قيد القيمة المطلقة (absolute value) إلى قيدين من نوع اكبر واصغر.

$$|\sum a_{ij}\,X_j| \leq b_i \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sum a_{ij}X_j \leq b_i \\ -\sum a_{ij}X_j \leq b_i \end{Bmatrix} \qquad X_i = X_i^{'} - X_i^{''}$$

$$or\ |\sum a_{ij}\,X_j| \geq b_i \begin{Bmatrix} -\sum a_{ij}X_j \leq -b_i \\ \sum a_{ij}X_j \leq -b_i \end{Bmatrix} \qquad and\ \ X_i^{'}, X_i^{''} \geq 0$$

5. تحويل المتغير غير المقيد بالإشارة *(unrestricted sign)* الى متغرين غير سالبين.

مثال

حول مشكلة البرمجة الخطية الاتية الى الصيغة القانونية؟

Min Z= 3X1 - 3X2 + 7X3

S.T

X1 + X2 + 3X3 ≤ 40 .....(1)

X1 + 9X2 -7X3 ≥ 50 .....(2)

5X1 + 3X2 = 20 .....(3)

$$|5X2 + 8X3| \leq 100 \quad \ldots.(4)$$

&X1, X2 ≥ 0, X3 Unres.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل

1. نحول القيد 2 من نوع اكبر الى اصغر من خلال ضربه بـ(-1).
2. نحويل القيد3 من نوع اكبر الى اصغر من خلال تحويلة الى متباينتين من نوع اكبر واصغر ومن ثم نحول الى
   من نوع اكبر الى اصغر من خلال ضربه بـ(-1).
3. نحول القيد 4 الى متباينين من نوع اصغر احدهما موجبة والاخرى سالبة.
4. نحول المتغير3 من قيد غير مقيد بأشارة الى الصيغة الاتية:

$$X_3 = \bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3$$

1) نحول دالة من نوع Min الى Max من خلال ضربها بـ(-1).

$$Max\ W = -X_1 + 3X_2 - 7\ (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3)$$

$$X_1 + X_2 + 3\ (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3) \leq 40 \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$
$$-X_1 - 9X_2 + 7\ (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3) \leq -50 \dots\dots\dots (2)$$
$$5X_1 + 3X_2 \leq 20 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$
$$-5X_2 - 3X_2 \leq -20 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$
$$5X_2 + 8\ (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3) \leq 100 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$
$$-5X_2 - 8\ (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3) \leq -100 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (6)$$
$$\&\ X_1, X_2, \bar{X}_3, \bar{\bar{X}}_3 \geq 0$$

مثال

حول انموذج البرمجة الخطية الاتي الى الصيغة القانونية؟

$Z = 3X1 + 5X2$

≤ 4

$2 \leq 12$

$+2X2 \leq 18$

$-10,\ X2 \geq 0$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الصيغة القياسية (Standard form)

تمتاز هذه الصيغة بألاخصائص الاتية :

1. جميع القيود تكون معادلات (القيود من نوع مساواة (=)) ماعدا قيد عدم السالبية (nonnegative) إذ تبقى المتباينة من نوع أكبر من أو يساوي.
2. الطرف الأيمن للقيود يكون غير سالب (أي إن $b_i \geq 0$) .
3. دالة الهدف تكون من نوع تصغير (min) أو تعظيم (max) .
4. يمكن تحويل قيود المتباينات إلى معادلات من خلال اضافة متغيرات وهمية.

$$\sum a_{ij}X_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum a_{ij}\ X_j + S_i = b_i$$

$$\sum a_{ij}X_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum a_{ij}\ X_j - S_i + R = b_i$$

اذ إن S_i تمثل متغيرات لإكود (Slack variables) وهي متغيرات وهمية تكون غير سالبة و R متغيرات اصطناعية.

ملاحظة : ان قيمة المتغيرات الوهمية في دالة الهدف تكون مساوية الى الصفر.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل

الصيغة القياسية للانموذج اعلاه كالاتي :

بما ان القيود جميعها من نوع اقل اويساوي عليه ولتحويلها الى مساوة نضيف كمية موجبة (S) لاغراض معادلة او موازنة طرفي المتباينة.

$$\text{Max } Z = 5X1 + 8X2 + 6X3 + 0S1 + 0S2$$

S.T

$$2X1 + 6X2 + 4X3 + S1 = 8$$

$$3X1 + 4X2 + 10X3 + S2 = 10$$

$$\& \; X1, X2, X3, S1, S2 \geq 0$$

المتغيرات الاصطناعية (Artificial Variable)

نستعمل المتغيرات الاصطناعية R_i عندما لانستطيع الحصول على الحل الاساسية الازالي (S.B.F.S) مباشرةً، وتحدث هذه الحالة عندما تكون القيود من نوع اكبر اويساوي ولتوضيح نأخذ المثال الاتي:

If we have :

$$5X1 - X2 \geq 2$$

$$X1+X2 \leq 4$$

عندما نحول هذه القيود الى الصيغة القياسية ستكون كالاتي :

$$5X1 - X2 - S1 = 2$$

$$X1+X2 - S2 = 4$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اي الحل الاسياسية اولي سيكون بالشكل الاتي :

$-S1 = 2 \Longrightarrow S1 = -2$

$S2 = 4$

هذا يعني وجودقيمةسالبة لاحد المتغيرات الاسياسية وهذا غير ممكن لان احد الشروط ان تكون قيم تلك المتغيرات موجبة اوصفر ولتجنب هذه الحالة نضيف متغيرات تسمى بالمتغيرات الاصطناعية (Artificial Variables) لكل قيد قيد من نوع اكبر او يساوي، وعليه تكون الصيغة القياسية لمثال اعلاه بالصيغة الاتية :

$5X1 - X2 - S1 + R1 = 2$

$X1 + X2 + S2 = 4$

علماً بانه تكون قيمة المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف M– اذا كانت من نوع Max و M اذا كانت من نوع Min.

مثال

حول مشكلة البرمجة الخطية الاتية الى الصيغة القياسية؟

$\text{Max } Z = 7X1 + 2X2$

S.T

$X1 + 2X2 \leq 5$

$4X1 + 3X2 \geq 12$

$5X1 + 6X2 = 14$

$X1, X2 \geq 0$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل

الصيغة القياسية للانموذج اعلاه تكون كالاتي :

نضيف كمية موجبة (S) في حالة القيود من نوع اقل اويساوي ونطرح (S) ونضيف (R) اذا كانت من
اكبر او يساوي لاغراض معادلة او موازنة طرفي المتباينة.

$$\text{ax } Z = 7X1 + 2X2 - MR1 - MR2$$

اضافة كمية موجبة لموازنة المتباينة

$$+ 2X2 + S1 = 5$$

طرح كمية موجبة واضافة متغيرات اصطناعية لموازنة المتباينة

$$+ 3X2 - S2 + R1 = 12$$

طرفي المتباينة متوازنة عليه نضيف متغير اصطناعي فقط

$$+ 6X2 + R2 = 14$$

جميع المتغيرات غير سالبة

$$X2, X3, S1, S2, R1, R2 \geq 0$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner