~~اللوغاريتمية (Logarithmic functions)~~

لوغاريتم x للأساس b (The Logarithm to the base b of x) هو أس العدد الذي لو رفع b يكون الناتج x أي أن:

$$\log_b x = a \quad \text{تكافئ} \quad x = b^a$$

حيث $x > 0$ ، $b > 0$ ، $b \neq 1$ يعرف بأنه العدد الذي لو رفع

Examples

① $\log_{10} 100 = 2$ since $10^2 = 100$

② $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ since $(9)^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3$

③ $\log_b 1 = 0$ since $b^0 = 1$ ④ $\log_b b = 1$ since $b^1 = b$

⑤ $\log_2 16 = 4$ since $2^4 = 16$

~~The Logarithmic function with base b~~ اللوغاريتمية للأساس b

تسمى الدالة $y = \log_b x$ بالدالة اللوغاريتمية للأساس b

حيث إن $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، $x > 0$

Theorem If $b > 0$, $b \neq 1$, $a > 0$, $c > 0$ and $r \in R$,

① $\log_b 1 = 0$ ② $\log_b b = 1$ ③ $\log_b (ac) = \log_b a + \log_b c$

④ $\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$ ⑤ $\log_b a^r = r \log_b a$

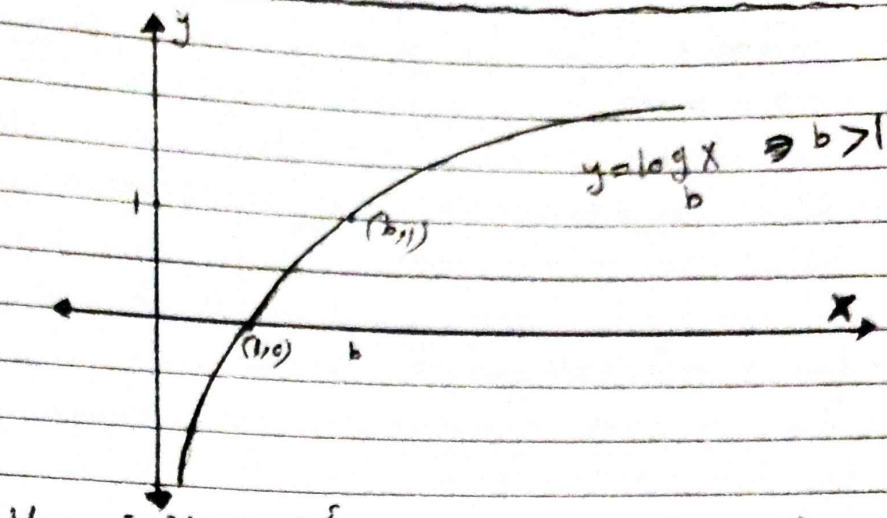
⑥ $\log_b \left(\frac{1}{c}\right) = -\log_b c$

~~Properties of $f(x)=\log_b x$ ($f(x)=\log_b x$ خواص الدالة)~~

$D_f=(0,\infty)=R^+$

$R_f=(-\infty,\infty)=R$

continuous on $(0,\infty)=R^+$



ملاحظات: ① عندما $b=10$ فإن اللوغاريتم الأساسي يسمى باللوغاريتم العادي (common Logarithm).

② عندما $b=e$ حيث إن $e\approx 2.7$ فإن اللوغاريتم الأساسي يسمى باللوغاريتم الطبيعي (natural Logarithm) والذي يرمز له بالرمز $\ln x$

دالة اللوغاريتم الطبيعي (The natural Logarithmic function)

تعريف: يعرف اللوغاريتم الطبيعي لـ x والذي يرمز له بالرمز $\ln x$ بالتكامل المحدد الآتي:

$$\log_e x=\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad , x>0$$

$\ln 1=0$ since $e^0=1$ and $\ln e=1$ since $e^1=e$

Theorem: If $a>0$, $c>0$ and $r\in R$, then:

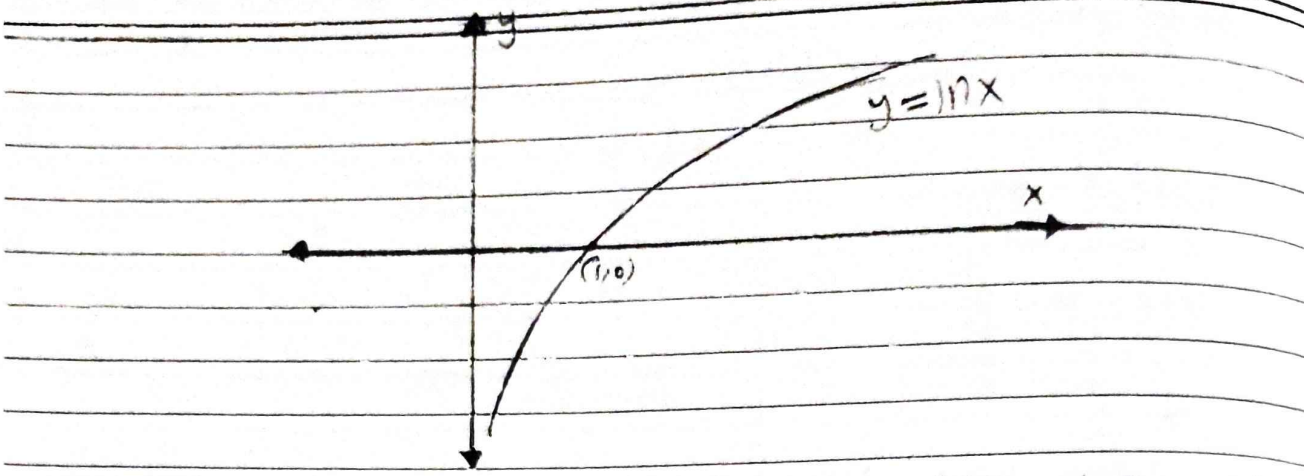
① $\ln 1=0$ ② $\ln(ac)=\ln a+\ln c$ ③ $\ln(\frac{a}{c})=\ln a-\ln c$

④ $\ln a^r=r\ln a$ ⑤ $\ln(\frac{1}{c})=-\ln c$

Properties of $f(x)=\ln x$ ($f(x)=\ln x$ خواص الدالة)

① $D_f=(0,\infty)=R^+$ ② $R_f=R$ ③ continuous on $D_f=(0,\infty)$

④ $\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty$ ⑤ $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$



يمكن تحويل اللوغارتم الذي اساسه b اى اللوغارتم الطبيعي (اللوغارتم الذي اساسه e) بموجب الصيغة الاتية:-

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

دالة اللوغاريتمية:- لتكن $y = \log_b x$ قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x فإن:-

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{x} \cdot \log_b e$$

$$\therefore \log_b e = \frac{\ln e}{\ln b} = \frac{1}{\ln b} \longrightarrow y' = \frac{1}{x \ln b} \quad , x > 0$$

$$\therefore \text{If } y = \log_b x \longrightarrow y' = \frac{1}{x \ln b} \quad , x > 0$$

Also,

$$\text{If } y = \ln x \longrightarrow y' = \frac{1}{x} \quad , x > 0$$

وبصورة عامة اذا كانت $y = \log_b u$ حيث ان $u = g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x فإنه بموجب قاعدة السلسلة يكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u \ln b} \cdot \frac{du}{dx}$$

اي أن مشتقة دالة لوغاريتمية أساسها b وحقيقي ما = $\frac{1}{\ln b}$ في مشتقة نفس الدالة

So, if $y=\ln u$ and $u=g(x)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

اي أن مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي (دالة لوغاريتمية أساسها e) هي مقلوب الدالة نفسها في مشتقة الدالة

Examples: Find $\frac{dy}{dx}=y'$

$y=\log_5(3x^2-5) \rightarrow y'=\frac{1}{3x^2-5}\cdot\frac{d}{dx}(3x^2-5)\cdot\frac{1}{\ln 5}$

$\frac{1}{3x^2-5}\cdot 6x\cdot\frac{1}{\ln 5} \rightarrow y'=\frac{6x}{\ln 5(3x^2-5)}$

$=\frac{\ln(3x^2-5)}{\ln 5} \rightarrow y'=\frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{6x}{3x^2-5}=\frac{6x}{\ln 5(3x^2-5)}$

$y=[\ln(3x+4)]^{\frac{3}{2}} \rightarrow y'=\frac{3}{2}[\ln(3x+4)]^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}[\ln(3x+4)]$

$y'=\frac{3}{2}[\ln(3x+4)]^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{3x+4}=\frac{9}{2}\frac{\sqrt{\ln(3x+4)}}{3x+4}$

$y=\ln|x|$

If $x>0 \rightarrow |x|=x \rightarrow y=\ln x \rightarrow y'=\frac{1}{x} \rightarrow$ ①

If $x<0 \rightarrow |x|=-x \rightarrow y=\ln(-x) \rightarrow y'=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x} \rightarrow$ ②

From ① and ② we have

$y'=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$

$y=\ln|\sin x| \rightarrow y'=\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

$y=\ln\left(\frac{x^2\sin x}{\sqrt{1+x}}\right) \rightarrow y=\ln(x^2\sin x)-\ln(\sqrt{1+x})$

~~$\rightarrow y = \ln x^2 + \ln\sin x - \frac{1}{2}\ln(1+x)$~~ ~~$\rightarrow y = 2\ln x + \ln\sin x - \frac{1}{2}\ln(1+x)$~~

$\therefore y' = \frac{2}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{2(1+x)} \rightarrow y' = \frac{2}{x} + \cot x - \frac{1}{2(1+x)}$

⑥ $y = \sin\left(\frac{5}{\ln x}\right) \rightarrow y' = \cos\left(\frac{5}{\ln x}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{\ln x}\right)$

$\rightarrow y' = \cos\left(\frac{5}{\ln x}\right) \cdot \left(-5(\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{-5\cos\left(\frac{5}{\ln x}\right)}{x(\ln x)^2}$

شتقاق اللوغاريتمي: يمكننا اشتقاق الدوال المعقدة كحاصل
وخارج القسمة ودوال القوى مستخدمين خواص اللوغاريتمات
بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للدالة أولاً ثم اشتقاق ثانياً
هو موضح في الأمثلة الآتية

Examples Find $\frac{dy}{dx} = y'$

① $y = \frac{(x^2-8)^{\frac{1}{3}}\sqrt{x^3+1}}{x^6 - 7x + 5}$

خذ ln للطرفين ينتج:-

$\ln y = \ln\left(\frac{(x^2-8)^{\frac{1}{3}}\sqrt{x^3+1}}{x^6-7x+5}\right)$

$\rightarrow \ln y = \ln(x^2-8)^{\frac{1}{3}} + \ln\sqrt{x^3+1} - \ln(x^6-7x+5)$

$\rightarrow \ln y = \frac{1}{3}\ln(x^2-8) + \frac{1}{2}\ln(x^3+1) - \ln(x^6-7x+5)$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x ينتج:

$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2x}{3(x^2-8)} + \frac{3x^2}{2(x^3+1)} - \frac{6x^5-7}{x^6-7x+5}$

$\rightarrow y' = y\left[\frac{2x}{3(x^2-8)} + \frac{3x^2}{2(x^3+1)} - \frac{6x^5-7}{x^6-7x+5}\right]$

$\therefore y' = \frac{(x^2-8)^{\frac{1}{3}}\sqrt{x^3+1}}{x^6-7x+5} \cdot \left[\frac{2x}{3(x^2-8)} + \frac{3x^2}{2(x^3+1)} - \frac{6x^5-7}{x^6-7x+5}\right]$

$(x^2+1)^{\sin x}$ نأخذ ln للطرفين $\ln y = \ln(x^2+1)^{\sin x} = \sin x \cdot \ln(x^2+1)$

$\ln y = \sin x \cdot \ln(x^2+1)$

$\frac{1}{y}\cdot y' = \sin x \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \ln(x^2+1)\cdot\cos x$

$y' = y\left[\frac{2x\sin x}{x^2+1} + \cos x \cdot \ln(x^2+1)\right]$

$y' = (x^2+1)^{\sin x}\left[\frac{2x\sin x}{x^2+1} + \cos x \cdot \ln(x^2+1)\right]$

$y = (\ln x)^{\tan x}$ نأخذ ln للطرفين $\ln y = \ln(\ln x)^{\tan x} = \tan x \cdot \ln(\ln x)$

$\ln y = \tan x \cdot \ln(\ln x)$

$\frac{1}{y}\cdot y' = \tan x \cdot \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} + \ln(\ln x)\cdot\sec^2 x$

$y' = y\left[\frac{\tan x}{x\ln x} + \sec^2 x \cdot \ln(\ln x)\right]$

$y' = (\ln x)^{\tan x}\cdot\left[\frac{\tan x}{x\ln x} + \sec^2 x\cdot\ln(\ln x)\right]$

Exercise

Find $\frac{dy}{dx}$

① $y=\ln(x^2+1)$ ② $y=[\ln(x+2)]^2$ ③ $y=\ln|\tan x|$ ④ $y=\ln\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$

⑤ $y=\ln|x^3-7x^2-3|$ ⑥ $y=x^3\log_2(3-2x)$ ⑦ $y=\cos(\ln x)$ ⑧ $y=x^{x^2}$

⑨ $y=\sin^2(\ln x)$ ⑩ $y=x^{\sin x}$ ⑪ $y=(x^3-2x)^{\ln x}$ ⑫ $y=\sqrt[3]{\frac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}}$

⑬ $y=\ln\left(\frac{\cos x}{\sqrt{4-3x^2}}\right)$ ⑭ $y=\frac{x\sqrt[3]{x-5}}{1+\sin^3 x}$ ⑮ $y=\frac{\sin x\cos x\tan^3 x}{\sqrt{x}}$

⑯ $y=\frac{x^9\sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^3)^4}$ ⑰ $y=\ln\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x+3}\cdot\sqrt[5]{3x-2}\right)$ ⑱ $y=x^{\ln x}$