(The exponential functions) الدوال الأسية

(The natural exponential function) الدالة الأسية الطبيعية

تعتبر دالة اللوغاريتم الطبيعي $\ln x$ هي الدالة العكسية للدالة الأسية e^x أي أن:

$$y = e^x \longleftrightarrow \ln y = x$$

مدى الدالة الأسية الطبيعية هو مدى الدالة اللوغاريتمية الطبيعية $\mathbb{R}$. بينما يكون مدى الدالة الأسية الطبيعية هو مدى الدالة اللوغاريتمية الطبيعية أي $\mathbb{R}^+$

كما أن الدالة الأسية الطبيعية تسمى أيضاً بالدالة الأسية الأسية e.

Theorem (1): ① $\ln e^x = x$ ② $e^{\ln x} = x$

Theorem (2): If $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ and $r \in \mathbb{Q}$, then:

① $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$ ② $\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$ ③ $\left[e^{x_1}\right]^r = e^{rx_1}$

④ $e^0 = 1$ ⑤ $e^1 = e$

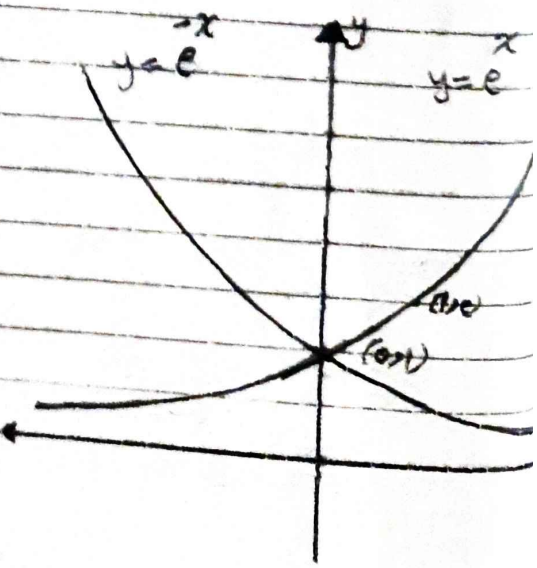
properties of $f(x) = e^x$

① $D_f = \mathbb{R}$ ② $R_f = (0,\infty) = \mathbb{R}^+$

③ $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

④ $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ ⑤ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

⑥ $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ ⑦ $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$



مشتقة الدالة الأسية الطبيعية e^x

$y = e^x \xrightarrow{\text{تكافئ}} \ln y = x$

$\ln y \xrightarrow{\text{باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ } x} \frac{1}{y} \cdot y' = 1 \longrightarrow y' = y \longrightarrow y' = e^x$

$$y = e^x \longrightarrow \frac{dy}{dx} = y' = e^x$$

وبصورة عامة اذا كانت $y = e^u$ حيث إن $u = g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x فإنه بموجب قاعدة السلسلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

اي أن مشتقة دالة اسية اساسها e هو نفس الدالة الأسية مضروبة بمشتقة الأس

Ex: Find $\frac{dy}{dx} = y'$

$y = e^{-2x} + e^{\cos\sqrt{x}} \longrightarrow y' = e^{-2x} \cdot \frac{d}{dx}[-2x] + e^{\cos\sqrt{x}} \cdot \frac{d}{dx}[\cos\sqrt{x}]$

$= e^{-2x} \cdot (-2) + e^{\cos\sqrt{x}} \cdot (-\sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}) = -2e^{-2x} - \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} e^{\cos\sqrt{x}}$

$y = \ln(\cos e^{5x}) \longrightarrow y' = \frac{1}{\cos e^{5x}} \cdot \frac{d}{dx}[\cos e^{5x}]$

$= \frac{1}{\cos e^{5x}} \cdot (-\sin e^{5x} \cdot e^{5x} \cdot 5) = -5e^{5x} \frac{\sin e^{5x}}{\cos e^{5x}} = -5e^{5x} \tan e^{5x}$

$y = \log_3(e^{2x} + \sin 4x) \longrightarrow y' = \frac{1}{e^{2x} + \sin 4x} \cdot \frac{d}{dx}[e^{2x} + \sin 4x] \cdot \frac{1}{\ln 3}$

$= \frac{1}{e^{2x} + \sin 4x} \cdot (2e^{2x} + 4\cos 4x) \cdot \frac{1}{\ln 3} = \frac{2e^{2x} + 4\cos 4x}{\ln 3 (e^{2x} + \sin 4x)}$

④ $y = e^{\tan^{-1}(x^2)} + \tan^{-1}(e^{x^2})$

$$\therefore y' = e^{\tan^{-1}(x^2)} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x + \frac{1}{1+(e^{x^2})^2} \cdot e^{x^2} \cdot 2x$$

$$\therefore y' = \frac{2x}{1+x^4} e^{\tan^{-1}(x^2)} + \frac{2x e^{x^2}}{1+e^{2x^2}}$$

The exponential function with base b) b الدالة الأسية بالأساس

تكون الدالة اللوغاريتمية بالأساس b ($\log_b x$) حيث إن $x>0$ ، $b>0$ ، $b\neq 1$ هي الدالة العكسية بالأساس b أي أن b^x ؛

$$y = b^x \longleftrightarrow \log_b y = x$$

تنطلق الدالة الأسية بالأساس b فمدى الدالة اللوغاريتمية بالأساس b هو $\mathbb{R}$. بينما يكون مدى الدالة الأسية بالأساس b هو $\mathbb{R}^+$ تنطلق الدالة اللوغاريتمية بالأساس b أي

تعلم أن الدالة الأسية بالأساس b تسمى أيضاً بالدالة الأسية عندما الأساس ثابت

Examples: ① $f(x) = 2^x$ ② $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ③ $f(x) = \pi^x$

Theorems: If $b>0$, $b\neq 1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ and $x_2 \in \mathbb{R}$, then:-

① $b^{x_1} \cdot b^{x_2} = b^{x_1+x_2}$ ② $\frac{b^{x_1}}{b^{x_2}} = b^{x_1-x_2}$ ③ $b^{-x_1} = \frac{1}{b^{x_1}}$

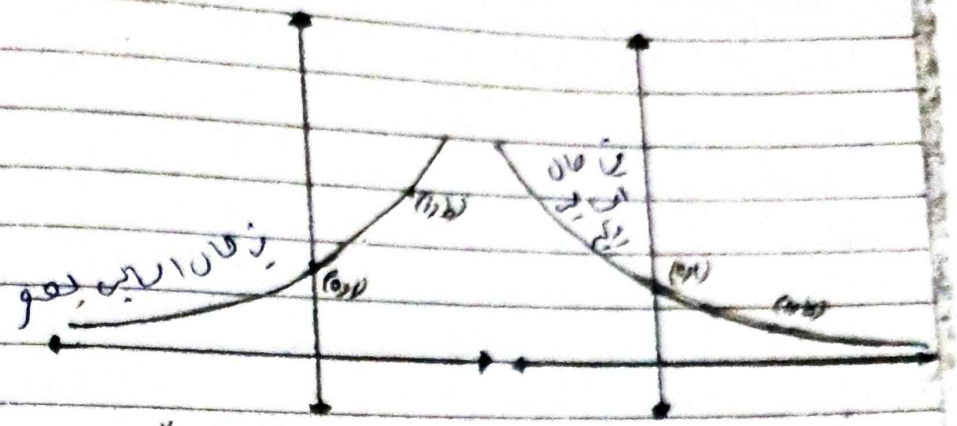
④ $(b^{x_1})^{x_2} = b^{x_1 x_2}$ ⑤ $b^0 = 1$ ⑥ $b^1 = b$

properties of $f(x) = b^x$; $b\neq 1$, $b>0$

① $D_f = \mathbb{R}$ ② $R_f = (0,\infty) = \mathbb{R}^+$ ③ Continuous on $\mathbb{R} = D_f$

$b > 1$

$0 < b < 1$



$y = b^x \Rightarrow b > 1$ $\quad$ $y = b^x \Rightarrow 0 < b < 1$

مشتقة الدالة الأسية للأساس b

$$y = b^x \longleftrightarrow \log_b y = x \quad \text{تكافئ}$$

$$\log_b y \xrightarrow[\text{بالنسبة لـ } x]{\text{بإشتقاق الطرفين}} 1 = \frac{1}{y \ln b} \cdot y' \longrightarrow y' = y \ln b$$

$$y' = b^x \cdot \ln b$$

$$\boxed{\text{If } y = b^x \longrightarrow y' = b^x \cdot \ln b}$$

وبصورة عامة اذا كانت $y = b^u$ حيث أن $u = g(x)$ دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة لـ x فإنه بموجب قاعدة السلسلة يكون

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = b^u \cdot \ln b \cdot \frac{du}{dx}}$$

أي أن مشتقة دالة أسية أساسها ثابت (b) هو نفس الدالة في مشتقة الأس في $\ln b$.

Examples: Find $\frac{dy}{dx} = y'$

$$y' = 10^{\sin 5x} + 4^{\sin^{-1}(2x)}$$

$$y' = 10^{\sin 5x} \cdot 5\cos 5x \cdot \ln 10 + 4^{\sin^{-1}(2x)} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot \ln 4$$

$\sin(2x)$ $\quad -1$

$\therefore y' = 5\ln 5 \cdot \cos 5x \cdot e^{\sin 2x} + \dfrac{2\ln 4 \cdot 4}{\sqrt{1-4x^2}}$

② $y = 3^{x^2+x+1} \longrightarrow y' = 3^{x^2+x-1} \cdot (2x+1) \cdot \ln 3 = \ln 3 (2x+1) \cdot 3^{x^2+x}$

③ $y = \pi^{x\tan x} \longrightarrow y' = \pi^{x\tan x} \cdot (x\sec^2 x + \tan x) \cdot \ln \pi$

Exercise

Find $\dfrac{dy}{dx} = y'$

① $y = \sin(e^{x+\frac{1}{x}})$ ② $y = e^{x+\sqrt{x+2}}$ ③ $y = \cos^{-1}(e^{-x})$ ④ $y = e^{-5x^2}$ ⑤ y

⑥ $y = \ln e^{x}$ ⑦ $y = e^{(\ln x)^2}$ ⑧ $y = e^{\tan^{-1}(\cos 3x)}$ ⑨ $y = e^{\ln(x^3+1)}$ ⑩ $y = \ln($

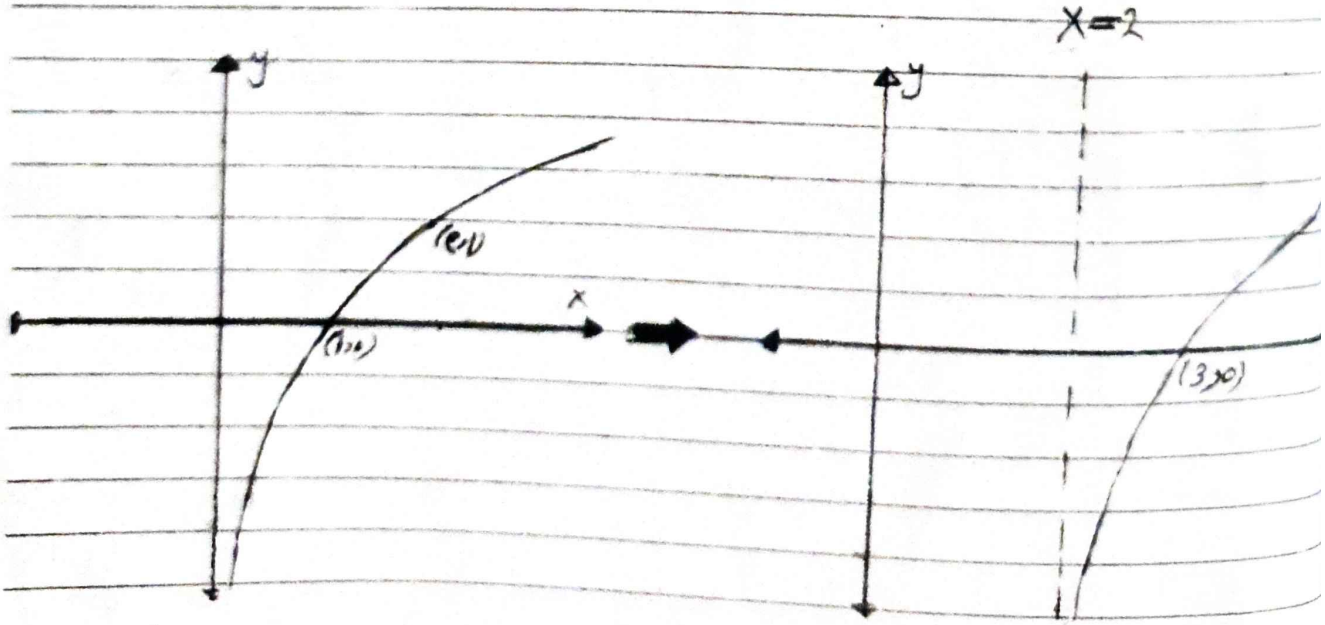
⑪ $y = 5^{x\ln x}$ ⑫ $y = \pi^{\sin x}$ ⑬ $y = e^{(x-\frac{3x}{e})}$ ⑭ $y = e^{x\tan x}$ ⑮ $y = e$

Example: sketch the graph of ① $y = 1 + \ln(x-2)$ ② $y = e^{x-2}$

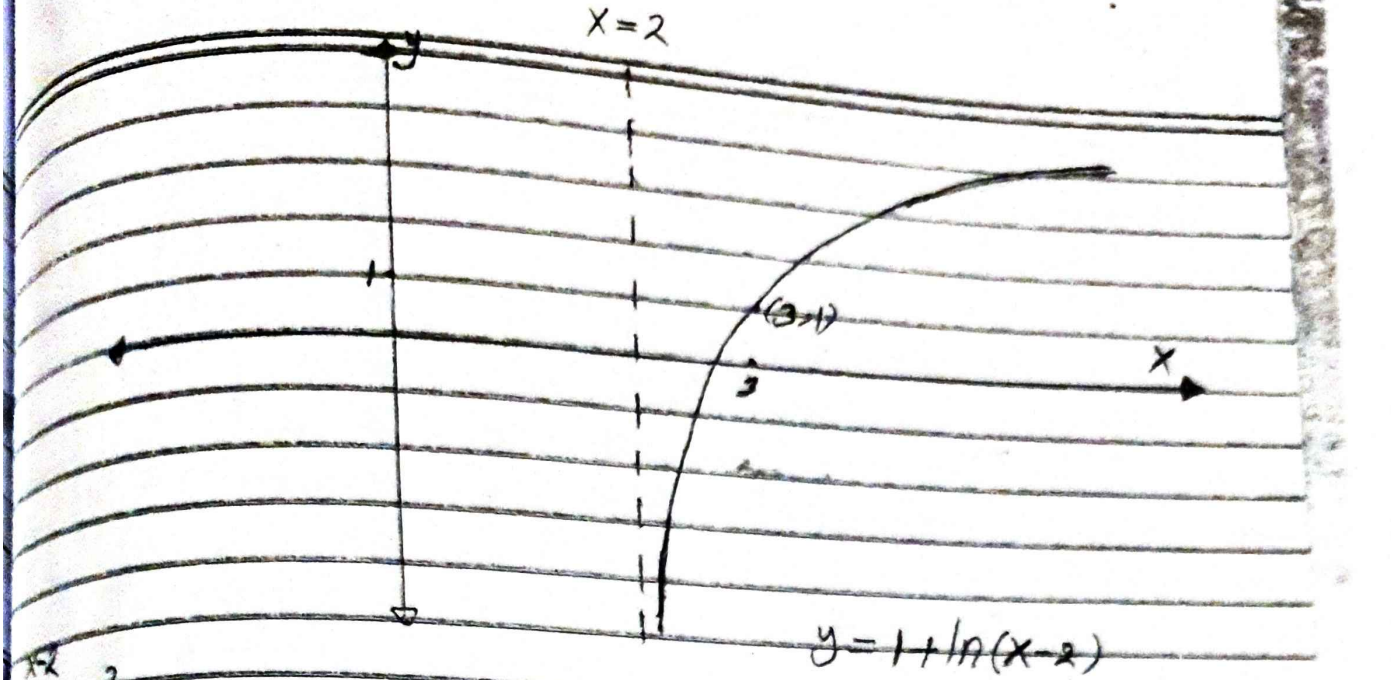
③ $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} - 1$ $\qquad \ln x$

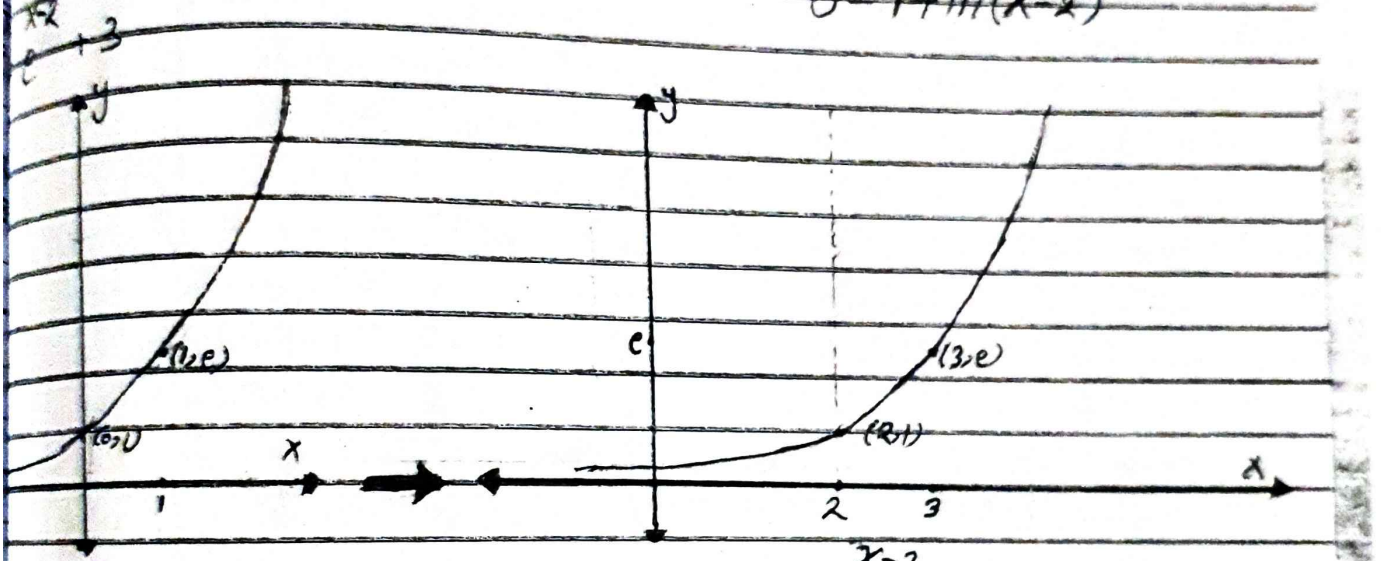
Soln

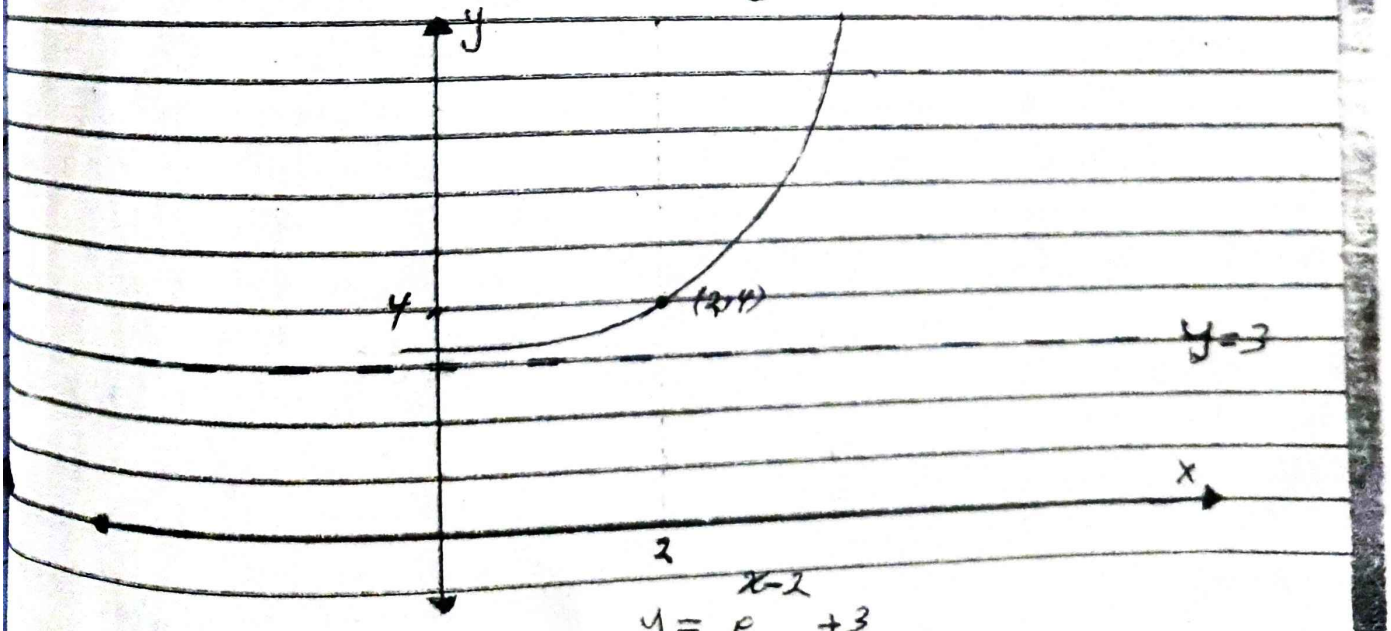
① $y = 1 + \ln(x-2)$ $\qquad \phi$

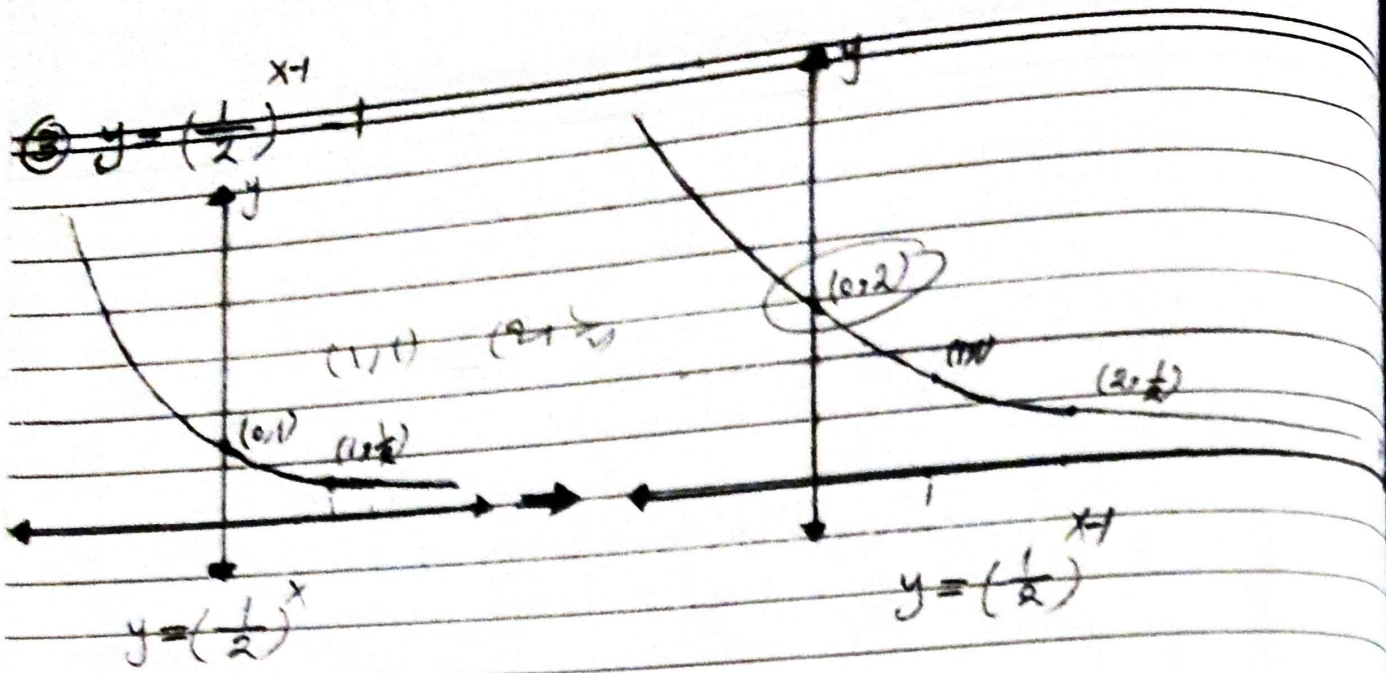


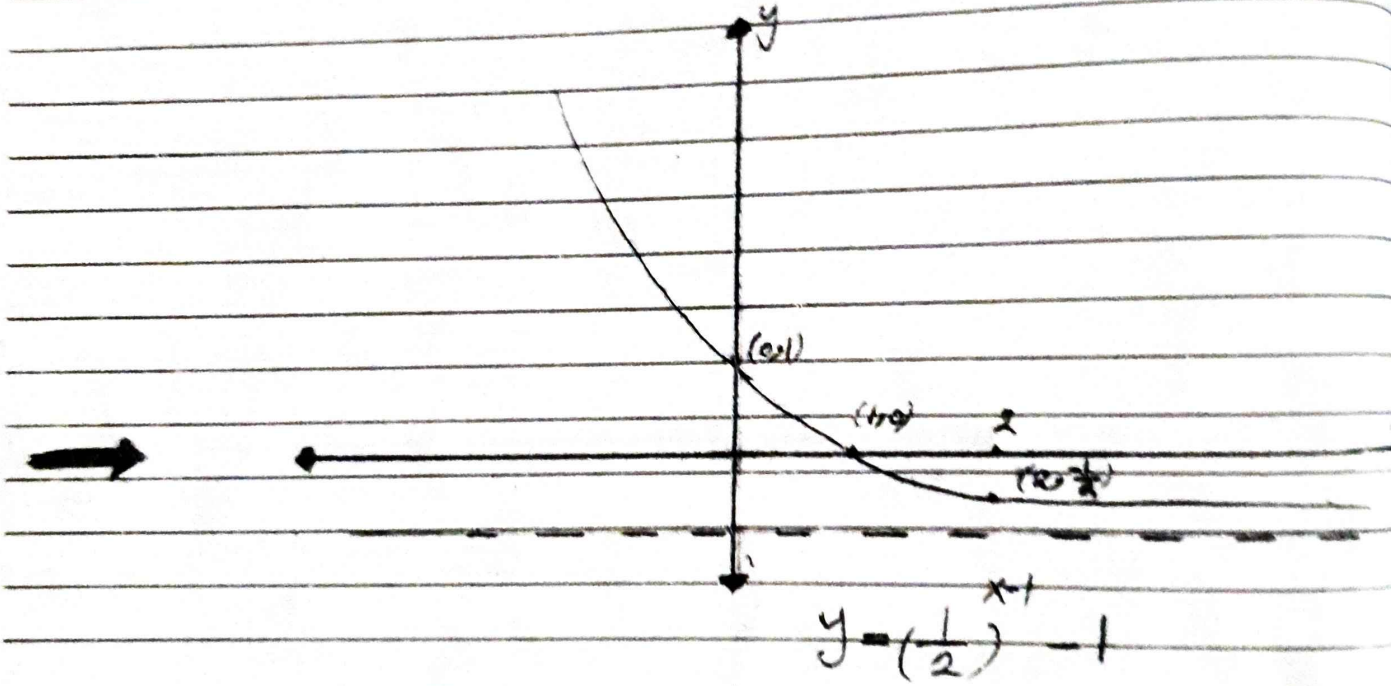
$y = \ln x$ $\qquad$ $y = \ln(x-2)$


X=2
y
1
(3,1)
3
x
y = 1 + ln(x-2)


y
(1,e)
(0,1)
x
1
y
e
(3,e)
(2,1)
x
2
3
y = e^(x-2)


y
4
(2,4)
y=3
x
2
y = e^(x-2) + 3





Hyperbolic Functions دوال القطع الزائد

Hyperbolic functions are denoted as follows:-

sinhx , coshx , tanhx , cothx , sechx , and csch

and are defined in terms of exponential functions as :

① $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

② $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{ix}}{2}$