# التكامل (Integration)

## التكامل الغير محدد (The indefinite integral)

إن عملية التكامل هي العملية العكسية لعملية الاشتقاق. إن الرمز $\int \dots dx$ هو عكس الرمز $\frac{d}{dx}(\dots)$ فالاول يعني (التكامل غير المحدد بالنسبة للمتغير $x$ للدالة ....) والثاني يعني (المشتقة بالنسبة للمتغير $x$ للدالة ....) فمثلاً إن مشتقة الدالة $x^3$ هي $3x^2$. كذلك مشتقة كل من الدوال $(x^3+x, x^3+1, x^3-1, \dots)$ هي ايضاً $3x^2$. وبصورة عامة اذا كان $c$ ثابت اختياري $(c \in R)$ فإن مشتقة الدالة $x^3+c$ هي $3x^2$ وعليه نستطيع القول إن $3x^2$ هي مشتقة موجودة غير متفردة من الدوال بالشكل $x^3+c$ وعلى هذا الاساس فإن $\int 3x^2 dx = x^3+c$ حيث $c$ ثابت اختياري.

**صيغ اساسية للتكامل:** إن الصيغ ادناه مستمدة من قوانين الاشتقاق على اعتبار إن عملية التكامل هي العملية العكسية لعملية الاشتقاق.

1. $\int dx = x + c \quad (c \in R)$
2. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \quad , (m \in R \text{ and } m \neq -1)$
3. $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx \quad (a \in R)$
4. $\int [f(x) \mp g(x)] dx = \int f(x) dx \mp \int g(x) dx$
5. $\int [f(x)]^m f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{m+1}}{m+1} + c \quad , (c \in R \text{ and } m \neq -1)$
6. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
7. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

ملاحظة: هل يجب ان تكون مشتقة الزاوية موجودة في التكامل اذا موجودة نجد التكامل كما مبين. واذا لا؟

(8) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

(9) $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$

(10) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$

(11) $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$

(12) $\int \sinh x\, dx = \cosh x + c$

(13) $\int \cosh x\, dx = \sinh x + c$

(14) $\int \operatorname{sech}^2 x\, dx = \tanh x + c$

(15) $\int \operatorname{csch}^2 x\, dx = -\coth x + c$

(16) $\int \operatorname{sech} x \tanh x\, dx = -\operatorname{sech} x + c$

(17) $\int \operatorname{csch} x \coth x\, dx = -\operatorname{csch} x + c$

يتقعها ثابت، نقرب ونقسم على ذلك الثابت ثم نوجد التكامل. اما اذا يتقعها متغير فلا يمكن اجراء التكامل بهذه الطريقة وانما يتم ايجاد التكامل بطريقة اخرى سوف تذكر لاحقاً.

Examples: Find the integral

(1) $\int (5x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 6)\, dx = \int 5x^6\, dx - \int 2x^4\, dx + \int 3x^2\, dx - \int 6\, dx = 5\int x^6\, dx - 2\int x^4\, dx + 3\int x^2\, dx - 6\int dx$

$= 5\frac{x^7}{7} - 2\frac{x^5}{5} + 3\frac{x^3}{3} - 6x + c$

$= \frac{5}{7}x^7 - \frac{2}{5}x^5 + x^3 - 6x + c$

(2) $\int \left(\frac{4x^3 + 5}{x^2}\right) dx = \int \left(4x + \frac{5}{x^2}\right) dx = 4\int x\, dx + 5\int x^{-2}\, dx$

$= 4\frac{x^2}{2} + 5\frac{x^{-1}}{-1} + c = 2x^2 - \frac{5}{x} + c$

③ $\int (x^2+2x-5)^3 (x+1)\,dx$

الحل بطريقتين

الأولى هي بصورة مربعة ⑤ الآلة حيث إن متبقية داخل القوس هي $2x+2 = 2(x+1)$ لذلك يجب التكامل بالمقدار $\frac{2}{2}$ وكالآتي:-

$$\int (x^2+2x-5)^3 (x+1)\,dx = \frac{2}{2}\int (x^2+2x-5)^3 (x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+2x-5)^3 (2x+2)\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+2x-5)^4}{4} + c$$

$$= \frac{1}{8}(x^2+2x-5)^4 + c$$

الطريقة الثانية:- هي طريقة التعويض وكالآتي:-

Let $u = x^2+2x-5 \longrightarrow du = (2x+2)\,dx = 2(x+1)\,dx$

$$\longrightarrow \frac{du}{2} = (x+1)\,dx$$

$$\therefore \int (x^2+2x-5)^3 (x+1)\,dx = \int u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^3\,du$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{u^4}{4} + c = \frac{1}{8}u^4 + c = \frac{1}{8}(x^2+2x-5)^4 + c$$

④ $\int x^4 \sqrt[3]{3-5x^5}\,dx = \frac{-25}{-25}\int x^4 (3-5x^5)^{\frac{1}{3}}\,dx$

$$= \frac{-1}{25}\int -25x^4 (3-5x^5)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{-1}{25}\,\frac{(3-5x^5)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{-3}{100}(3-5x^5)^{\frac{4}{3}} + c$$

or Let $u = 3-5x^5 \longrightarrow du = -25x^4\,dx \longrightarrow \frac{du}{-25} = x^4\,dx$

$$\therefore \int x^4 \sqrt[3]{3-5x^5}\,dx = \int \sqrt[3]{u}\cdot\frac{du}{-25} = \frac{-1}{25}\int u^{\frac{1}{3}}\,du$$

$$= \frac{-1}{25} \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{-3}{100} u^{\frac{4}{3}} + c = \frac{-3}{100} (3-5x^5)^{\frac{4}{3}} + c$$

(5) $\int e^{2x} \sqrt{1+e^{2x}}\, dx = \frac{1}{2} \int 2e^{2x} (1+e^{2x})^{\frac{1}{2}} dx$

$= \frac{1}{2} \frac{(1+e^{2x})^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3} (1+e^{2x})^{\frac{3}{2}} + c$

(6) $\int \frac{\sin^{-1}(3x)}{\sqrt{1-9x^2}} dx = \int \frac{[\sin^{-1}(3x)]^1}{\sqrt{1-(3x)^2}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3 \sin^{-1}(3x)}{\sqrt{1-(3x)^2}} dx$

$= \frac{1}{3} \frac{[\sin^{-1}(3x)]^2}{2} + c = \frac{1}{6} [\sin^{-1}(3x)]^2 + c$

(7) $\int \cos(5x)\, dx = \frac{1}{5} \int 5 \cos(5x) dx = \frac{1}{5} \sin(5x) + c$

or Let $u = 5x \rightarrow du = 5dx \rightarrow \frac{du}{5} = dx$

$\therefore \int \cos(5x) dx = \int \cos u \frac{du}{5} = \frac{1}{5} \int \cos u\, du$

$= \frac{1}{5} \sin u + c = \frac{1}{5} \sin(5x) + c$

(8) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = 2 \sin\sqrt{x} + c$

(9) $\int \sin(2x+9) dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin(2x+9) dx = \frac{-1}{2} \cos(2x+9) + c$

(10) $\int \sin(\sin x) \cos x\, dx = -\cos(\sin x) + c$

or Let $u = \sin x \rightarrow du = \cos x\, dx$

$\therefore \int \sin(\sin x) \cos x\, dx = \int \sin u\, du = -\cos u + c$

$= -\cos(\sin x) + c$

(11) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx = \int \frac{2 \sin x \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}} dx = 2 \int \sin x\, dx$

$= -2 \cos x + c$

(12) $\int x^2 \sec^2(x^3)\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \sec^2(x^3)\,dx = \frac{1}{3}\tan(x^3) + C$

(13) $\int \sec^2(\cos 3x)\sin 3x\,dx = \frac{-1}{3}\int \sec^2(\cos 3x)(-3\sin 3x)\,dx$

$= \frac{-1}{3}\tan(\cos 3x) + C$

(14) $\int \csc^2(\sin x)\cos x\,dx = -\cot(\sin x) + C$

(15) $\int \sec(4x)\tan(4x)\,dx = \frac{1}{4}\int 4\sec(4x)\tan(4x)\,dx = \frac{1}{4}\sec(4x) + C$

(16) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}\,dx = \int \cot x \csc x\,dx = -\csc x + C$

(17) $\int \cos^3(2x)\sin(2x)\,dx = \int [\cos 2x]^3 \sin(2x)\,dx$

$= \frac{-1}{2}\int [\cos 2x]^3(-2\sin(2x))\,dx = \frac{-1}{2}\frac{[\cos 2x]^4}{4} + C = \frac{-1}{8}[\cos 2x]^4 + C$

(18) $\int \tan^3(5x)\sec^2(5x)\,dx = \frac{1}{5}\int \tan^3(5x)\cdot 5\sec^2(5x)\,dx$

$= \frac{1}{5}\frac{\tan^4(5x)}{4} + C = \frac{1}{20}\tan^4(5x) + C$

(19) $\int 3\cot(3x)\csc^2(3x)\,dx = -\int -3\cot(3x)\csc^2(3x)\,dx$

$= -\frac{(\cot(3x))^2}{2} + C = -\frac{1}{2}[\cot(3x)]^2 + C$

(20) $\int \sec^3(2x)\tan(2x)\,dx = \int \sec^2(2x)\cdot\sec(2x)\tan(2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \sec^2(2x)\cdot 2\sec(2x)\tan(2x)\,dx = \frac{1}{2}\frac{[\sec(2x)]^3}{3} + C$

(21) $\int \cosh(2x-3)\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cosh(2x-3)\,dx = \frac{1}{2}\sinh(2x-3) + C$

(22) $\int \sinh^6 x \cosh x \, dx = \frac{\sinh^7 x}{7} + C$

(23) $\int \sqrt{\tanh x} \, \operatorname{sech}^2 x \, dx = \int (\tanh x)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sech}^2 x \, dx = \frac{(\tanh x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

## Exercises

Find the integrals

(1) $\int \left( \frac{7}{x^{3/4}} - \sqrt[3]{x} + 4\sqrt{x} \right) dx$ (2) $\int \left( \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) dx$ (3) $\int (2 + x^2)^2 \, dx$

(4) $\int \frac{(\ln x^2)^2}{x} \, dx$ (5) $\int \frac{dx}{(\frac{1}{3}x - 8)^5}$ (6) $\int \frac{(\sqrt{x} + 2)^8}{\sqrt{x}} \, dx$ (7) $\int \sqrt{5x + 3} \, dx$

(8) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx$ (9) $\int x \cos(3x^2) \, dx$ (10) $\int \frac{\sin(\frac{5}{x})}{x^2} \, dx$ (11) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

(12) $\int \frac{x \sin\sqrt{2x^2 - 5}}{\sqrt{2x^2 - 5}} \, dx$ (13) $\int \left( \frac{x^2 \sin x + 2\sin x}{2 + x^2} \right) dx$ (14) $\int \frac{\sec x}{\cos x} \, dx$

(15) $\int \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx$ (16) $\int \sec^2(\sin 5x) \cos(5x) \, dx$ (17) $\int \frac{\cos^3 x - 5}{\cos^2 x} \, dx$

(18) $\int \frac{dx}{\csc(2x)}$ (19) $\int e^{4x} \sec(e^{4x}) \tan(e^{4x}) \, dx$ (20) $\int (1 + \sin 3x)^9 \cos 3x \, dx$

(21) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx$ (22) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \frac{3}{2}\cos 2x}} \, dx$ (23) $\int \sqrt{\sin \pi x} \cos \pi x \, dx$

(24) $\int \sin^5(3x) \cos(3x) \, dx$ (25) $\int \sqrt{\tan x} \sec^2 x \, dx$ (26) $\int \frac{\sin 2x}{(5 + \cos 2x)^3} \, dx$

(27) $\int \frac{\cot^2 x}{\sin^2 x} \, dx$ (28) $\int \frac{\cosh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx$ (29) $\int \operatorname{csch}^2(3x) \, dx$ (30) $\int \tanh^2 x \, dx$

(31) $\int \coth^2 x \operatorname{csch}^2 x \, dx$ (32) $\int \tanh x \operatorname{sech}^3 x \, dx$ (33) $\int \sinh^5 x \cosh x \, dx$

## تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

① $\int e^x dx = e^x + c$

اي أنا لايجاد تكامل دالة اسية اساسها e (الدالة الاسية الطبيعية) نلاحظ هل إن مشتقة الاس موجودة في التكامل ، اذا موجودة فالتكامل هو نفس الدالة الاسية. واذا يتقسمها ثابت نضرب ونقسم على ذلك الثابت ثم التكامل هو نفس الدالة الاسية. اما اذا يتقسمها متغير نجد التكامل بطريقة اخرى نذكرها لاحقاً.

② $\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + c \quad (b \neq 1, b > 0, b \text{ ثابت})$

اي أنا لايجاد تكامل دالة اسية اساسها ثابت b $(b \neq 1, b > 0)$ نلاحظ أن هل مشتقة الاس موجودة في التكامل ، اذا موجودة فالتكامل هو نفس الدالة الاسية مقسومة على $\ln b$ (اي $\ln$ الثابت). واذا يتقسمها ثابت نضرب ونقسم على ذلك الثابت ثم التكامل هو نفس الدالة الاسية مقسومة على $\ln b$ ، اما اذا يتقسمها متغير نجد التكامل بطريقة اخرى نذكرها لاحقاً.

Examples: Find the integrals.

① $\int e^{5x} dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + c$

or Let $u = 5x \longrightarrow du = 5dx \longrightarrow \frac{du}{5} = dx$

$\therefore \int e^{5x} dx = \int e^u \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int e^u du = \frac{1}{5} e^u + c = \frac{1}{5} e^{5x} + c$

② $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$

③ $\int \frac{e^{\tan^{-1}(2x)}}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{\tan^{-1}(2x)}}{1+(2x)^2} dx = \frac{1}{2} e^{\tan^{-1}(2x)} + c$

④ $\int 5^{x^2+6x}(x+3) dx = \frac{1}{2}\int 5^{x^2+6x}(2x+6) dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{5^{x^2+6x}}{\ln 5} + c$

⑤ $\int \frac{z^{\ln x}}{x}\,dx = \frac{z^{\ln x}}{\ln z} + c$

⑥ $\int \frac{5^{\sin(2x)}}{\pi}\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{5^{\sin(2x)}}{\pi}\cdot 2\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\pi^{\sin(2x)}}{\ln \pi} + c$

⑦ $\int \frac{2^{\tan(5x)}}{\cos^2(5x)}\,dx = \int 2^{\tan(5x)}\cdot \sec^2(5x)\,dx = \frac{1}{5}\int 2^{\tan(5x)}\cdot 5\sec^2(5x)\,dx$

$= \frac{1}{5}\,\frac{2^{\tan(5x)}}{\ln 2} + c$

## Exercise

Find the integrals

① $\int e^{-x}\,dx$ ② $\int e^{\cos 2x}\sin 2x\,dx$ ③ $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,dx$ ④ $\int e^{\tan 10x}\sec^2(10x)\,dx$

⑤ $\int x^2 e^{x^3}\,dx$ ⑥ $\int e^{2\ln x}\,dx$ ⑦ $\int x^2 e^{-2x^3}\,dx$ ⑧ $\int e^{4x}\sin e^{4x}\,dx$

⑨ $\int \sqrt{e^x}\,dx$ ⑩ $\int \frac{dx}{e^{3x}}$ ⑪ $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}}$ ⑫ $\int 2^x\,dx$ ⑬ $\int x\,4^{-x^2}\,dx$

③ $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + c$

اي أن لايجاد تكامل دالة كسرية نلاحظ هل إن بسط الكسر هو مشتقة المقام موجودة في البسط اذا موجودة فالتكامل يساوي (ln|المقام|). اما اذا ينقصها ثابت نضربه ونقسم على ذلك الثابت ثم التكامل ايضاً يساوي ln|المقام|. اما اذا ينقصها متغير فلا يمكن اجراء التكامل بهذه الطريقة.

Example: Find the integrals

① $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ ② $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln|1+e^x| + c$

③ $\int \frac{x^2}{5+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{5+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\ln|5+x^3| + c$

④ $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c$

⑤ $\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{\frac{dx}{x}}{\ln x} = \ln|\ln x| + c$ ⑥ $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx = \ln|e^x - e^{-x}| + c$

⑦ $\int \frac{\sin 3x}{1+\cos 3x}\,dx = \frac{-1}{3}\int \frac{-3\sin 3x}{1+\cos 3x}\,dx = \frac{-1}{3}\ln|1+\cos 3x| + c$

⑧ $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}}{(1+e^x)e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx = -\int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx = -\ln|e^{-x}+1| + c$

⑨ $\int \frac{\sec^2 x}{3\tan(x)+5}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3\sec^2 x}{3\tan(x)+5}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3\tan(x)+5| + c$

⑩ $\int (3x+1)\cot(3x^2+2x)\,dx = \int (3x+1)\frac{\cos(3x^2+2x)}{\sin(3x^2+2x)}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int (6x+2)\frac{\cos(3x^2+2x)}{\sin(3x^2+2x)}\,dx = \frac{1}{2}\ln|\sin(3x^2+2x)| + c$

## Exercise

Find the integrals

① $\int \frac{(1+e^x)}{e^x}\,dx$ ② $\int 4x\tan(x^2)\,dx$ ③ $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ ④ $\int \frac{\sec(5x)\tan(5x)}{2\sec(5x)-1}\,dx$

⑤ $\int \frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x}\,dx$ ⑥ $\int \cot x\,dx$ ⑦ $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx$ ⑧ $\int \frac{\sinh 2x\,dx}{3+5\cosh 2x}$ ⑨ $\int \tanh x\,dx$

## تكامل الدوال المثلثية العكسية

① $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + c$ and $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ $(a>0)$ a ثابت

② $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + c$ and $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ $(a\neq 0)$

③ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}x + c$ and $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ $(a>0)$

# تكامل الدوال الزائدية العكسية

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1} x + c$ and $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1} x + c$ and $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

(3) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1} x + c$ and $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

(4) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \coth^{-1} x + c$ and $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

(5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{sech}^{-1}|x| + c$ and $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + c$

(6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\operatorname{csch}^{-1}|x| + c$ and $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{-1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + c$

Examples: Find the integrals

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}$ ⟶ Let $u = 2x$ ⟶ $du = 2\,dx$ ⟶ $\frac{du}{2} = dx$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{\frac{du}{2}}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1} u + c = \frac{1}{2}\sin^{-1}(2x) + c$

(3) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}$ ⟶ $u = e^x$ ⟶ $du = e^x\,dx$

$\therefore \int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + c = \sin^{-1}(e^x) + c$

(4) $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,dx = \int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{4-(e^x)^2}}$ ⟶ Let $u = e^x$ ⟶ $du = e^x\,dx$

$$\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{4-e^{2x}}} = \int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)+c = \sin^{-1}\left(\frac{e^x}{2}\right)+c$$

(5) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-3x^4}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-(\sqrt{3}\,x^2)^2}}$ → Let $u=\sqrt{3}\,x^2$ → $du = 2\sqrt{3}\,x\,dx$ → $\frac{du}{2\sqrt{3}} = x\,dx$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-3x^4}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-(\sqrt{3}\,x^2)^2}} = \int \frac{\frac{du}{2\sqrt{3}}}{\sqrt{4-u^2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)+c = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}\,x^2}{2}\right)+c$$

(6) $\int \frac{dx}{5+x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c$

(7) $\int \frac{e^x\,dx}{4+e^{2x}} = \int \frac{e^x\,dx}{4+(e^x)^2}$ → Let $u=e^x$ → $du = e^x\,dx$

$$\int \frac{e^x\,dx}{4+e^{2x}} = \int \frac{du}{4+u^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)+c = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{e^x}{2}\right)+c$$

(8) $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$ → Let $u=\cos x$ → $du = -\sin x\,dx$ → $-du = \sin x\,dx$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{-du}{1+u^2} = -\int \frac{du}{1+u^2} = -\tan^{-1}u+c = -\tan^{-1}(\cos x)+c$$

(9) $\int \frac{x\,dx}{1+16x^4} = \int \frac{x\,dx}{1+(4x^2)^2}$ → Let $u=4x^2$ → $du = 8x\,dx$ → $\frac{du}{8} = x\,dx$

$$\int \frac{x\,dx}{1+16x^4} = \int \frac{\frac{du}{8}}{1+u^2} = \frac{1}{8}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{8}\tan^{-1}u+c = \frac{1}{8}\tan^{-1}(4x^2)+c$$

(10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+c$

(11) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-3}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{(\sqrt{5}x)^2-3}}$ → Let $u=\sqrt{5}\,x$ → $du = \sqrt{5}\,dx$ → $\frac{du}{\sqrt{5}} = dx$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-3}} = \int \frac{\frac{du}{\sqrt{5}}}{\frac{u}{\sqrt{5}}\sqrt{u^2-3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-3}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\sec^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)+c = \frac{1}{\sqrt{3}}\sec^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{3}}\right)+c$$

(12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+(3x)^2}}$ → Let $u = 3x$ → $du = 3\,dx$ → $\frac{du}{3} = dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+9x^2}} = \int \frac{\frac{du}{3}}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{3}\sinh^{-1}u + c = \frac{1}{3}\sinh^{-1}(3x)+c$$

(13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c$

(14) $\int \frac{e^x}{1-e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x\,dx}{1-(e^x)^2}$ → Let $u = e^x$ → $du = e^x\,dx$

$$\int \frac{e^x\,dx}{1-e^{2x}} = \int \frac{du}{1-u^2} = \tanh^{-1}u + c = \tanh^{-1}(e^x)+c$$

## Exercise

Find the integrals

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$ (2) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ (3) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$ (4) $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$

(5) $\int \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$ (6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$ (7) $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$ (8) $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}$

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$ (10) $\int \frac{x\,dx}{3+x^4}$ (11) $\int \frac{dx}{4+9x^2}$ (12) $\int \frac{e^{x+1}\,dx}{4+e^{2x+2}}$

(13) $\int \frac{dx}{1+16x^2}$ (14) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$ (15) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x\sqrt{\sin^2 x-1}}$ (16) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$

(17) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ (18) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ (19) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$ (20) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-25}}$

(21) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^6}}$ (22) $\int \frac{dx}{x\sqrt{(\ln x)^2-1}}$ (23) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^6}}$ (24) $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

# طرق التكامل (Methods of Integration)

## ① التكامل بالتجزئة (Integration by parts)

هذه الطريقة مبنية على قاعدة مشتقة حاصل ضرب دالتين

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

حيث إن $u$ و $v$ والآن لـ $x$ قابلتان للاشتقاق. بتكامل طرفي هذه المعادلة مع ملاحظة $\int d(uv) = uv$ نحصل على قانون التكامل بالتجزئة.

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

هذا القانون يعبر عن التكامل $\int u\,dv$ بدلالة التكامل الآخر $\int v\,du$ الذي يفترض أن يكون أبسط صيغة من التكامل الأول. تستخدم هذه الطريقة في تكامل بعض الدوال بالاختيار المناسب لـ $u$ و $dv$ بحيث إنه لو أخذت مشتقة $u$ وتكامل $dv$ كان تكامل $\int v\,du$ أبسط من التكامل الأصلي $\int u\,dv$.

ملاحظات

① عند استخدام طريقة التجزئة الدالة التي نتطلع تكاملها نفرضها $dv$ وما الأخرى نفرضها $u$.

② لإيجاد تكامل $\int p(x)\,q(x)\,dx$ حيث إن $p(x)$ متعددة حدود و $q(x)$ دالة يمكن تكاملها عدة مرات فالأنسب نفرضها $u$ هي $p(x)$ والتي نفرضها $dv$ هي $q(x)$ (والعكس غير صحيح) في هذه الحالة فقط يمكن أيضاً استخدام الطريقة الجدولية بالاستعانة بطريقة التجزئة.

③ تستخدم طريقة التجزئة في تكامل الدوال اللغارتمية والعكسية.

Examples Find the integrals

① $\int x \ln x\,dx$

$u = \ln x$ $\qquad dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx$ $\qquad v = \int dv = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

## وتسمى تقنية التكامل بالتجزئة على مراحل :

$$\int x \ln x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx$$

$$\therefore \int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c$$

(2)

(a) $\int \ln(2x+3) \, dx$ (الحل = e1,)  (b) $\int \ln x \, dx$  (ch.)

$u = \ln(2x+3)$ $\qquad dv = dx$

$du = \frac{2 \, dx}{2x+3}$ $\qquad v = \int dv = \int dx = x$

$$\therefore \int \ln(2x+3) \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$= \ln(2x+3) \cdot x - \int x \cdot \frac{2}{2x+3} \, dx$$

$$= x \ln(2x+3) - \int \frac{2x \, dx}{2x+3}$$

$$= x \ln(2x+3) - \int \frac{(2x+3-3) \, dx}{2x+3}$$

$$= x \ln(2x+3) - \int \frac{2x+3}{2x+3} \, dx + \int \frac{3 \, dx}{2x+3}$$

$$= x \ln(2x+3) - \int dx + 3 \int \frac{dx}{2x+3}$$

$$= x \ln(2x+3) - x + \frac{3}{2} \int \frac{2 \, dx}{2x+3}$$

$$\therefore \int \ln(2x+3) \, dx = x \ln(2x+3) - x + \frac{3}{2} \ln|2x+3| + c$$

③ (a) $\int x\cos x\,dx$ (b) $\int x^2\cos x\,dx$

(b) $\int x^2\cos x\,dx$

$u = x^2$ $\qquad dv = \cos x\,dx$

$du = 2x\,dx$ $\qquad v = \sin x$

$\therefore \int x^2\cos x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$= x^2\sin x - \int \sin x \cdot 2x\,dx$

$\therefore \int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx$ ----- (1)

الآن نجد التكامل $\int x\sin x\,dx$ باستخدام أيضاً طريقة التجزئة

$u = x$ $\qquad dv = \sin x$

$du = dx$ $\qquad v = -\cos x$

$\therefore \int x\sin x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$= x(-\cos x) - \int -\cos x\,dx$

$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$

$\therefore \int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x$

بالتعويض في (1) ينتج أن:-

$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2[-x\cos x + \sin x] + C$

$\therefore \int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

أو يمكن استخدام الطريقة الجدولية لأن $p(x) = x^2$ متعددة حدود و $q(x) = \cos x$ دالة يمكن تكاملها عدة مرات

| الاشتقاق المتكرر | | التكامل المتكرر |
|---|---|---|
| $x^2$ | + | $\cos x$ |
| $2x$ | − | $\sin x$ |
| $2$ | + | $-\cos x$ |
| $0$ | | $-\sin x$ |

$$\therefore \int x^2 \cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$$

④ (a) $\int x\,e^x\,dx$ (ch.) (b) $\int x^2 e^{-x}\,dx$ (c) $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$ (ch.)

(b) $\int x^2 e^{-x}\,dx$

طريقة التجزئة (واجب)

الطريقة الجدولية $p(x)=x^2$ متعددة حدود و $g(x)=e^{-x}$ يمكن تكاملها عدة مرات

| الاشتقاق المتكرر | | التكامل المتكرر |
|---|---|---|
| $x^2$ | + | $e^{-x}$ |
| $2x$ | − | $-e^{-x}$ |
| $2$ | + | $e^{-x}$ |
| $0$ | | $-e^{-x}$ |

$$\therefore \int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$$
$$= -e^{-x}(x^2+2x+2) + c$$

⑤ (a) $\int \tan^{-1}(3x)\,dx$ (b) $\int \sin^{-1}(2x)\,dx$ (ch) (c) $\int x\sec^{-1}x\,dx$

(a) $\int \tan^{-1}(3x)\,dx$

$u = \tan^{-1}(3x)$ $\qquad dv = dx$

$du = \dfrac{3\,dx}{1+(3x)^2}$ $\qquad v = x$

$$\therefore \int \tan^{-1}(3x)\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= \tan^{-1}(3x)\cdot x - \int x \cdot \frac{3\,dx}{1+9x^2}$$

$$= x\tan^{-1}(3x) - \int \frac{3x\,dx}{1+9x^2}$$

$$= x\tan^{-1}(3x) - \frac{1}{6}\int \frac{18x\,dx}{1+9x^2}$$

$$\therefore \int \tan^{-1}(3x)\,dx = x\tan^{-1}(3x) - \frac{1}{6}\ln|1+9x^2| + c$$

⑥ ⓐ $\int e^x \cos x\,dx$ ⓑ $\int \sin(\ln x)\,dx$ ch. ⓒ $\int \cos(\ln x)\,dx$ ch.

ⓐ $\int e^x \cos x\,dx \longrightarrow u = e^x \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = e^x dx \qquad v = \sin x$

$$\therefore \int e^x \cos x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\therefore \int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int \sin x \cdot e^x\,dx \quad \text{-----} ①$$

الآن نجد $\int \sin x \cdot e^x\,dx$ باستخدام أيضاً طريقة التجزئة

$\int e^x \sin x\,dx \longrightarrow u = e^x \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = e^x dx \qquad v = -\cos x$

$$\therefore \int e^x \sin x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= e^x(-\cos x) - \int -\cos x \cdot e^x\,dx$$

$$\therefore \int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \int \cos x \cdot e^x\,dx$$

بالتعويض في ① ينتج أن:-

$$\therefore \int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \left[-e^x \cos x + \int \cos x \cdot e^x\,dx\right]$$

$$\therefore \int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx$$

$\therefore 2\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x$

$\therefore \int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}[e^x \sin x + e^x \cos x] + c$

(2) show that

(a) $\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{(n-1)}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$ (ch.)

(b) $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{(n-1)}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$ $\Big\} n \in Z^+$

proof: (b) $\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x \cos x\,dx$

$u = \cos^{n-1} x \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = (n-1)\cos^{n-2} x \cdot (-\sin x)\,dx \qquad v = \sin x$

$\therefore \int \cos^n x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$= \cos^{n-1} x \sin x - \int \sin x \cdot (n-1)\cos^{n-2} x\,(-\sin x)\,dx$

$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \sin^2 x \cos^{n-2} x\,dx$

$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\,dx$

$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx$

$\therefore (n-1)\int \cos^n x\,dx + \int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx$

$n\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx$

$\therefore \int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{(n-1)}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

ملاحظة: في فرع (b) عندما $n=4$ ينتج أن:

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{1}{2}\int dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{8}\cos x \sin x + \frac{3}{8}x + C$$

(8) $\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx$ (9) $\int (\ln x)^2\,dx$ (10) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ (11) $\int x^2 \ln x\,dx$

(12) $\int x \sec^2 x\,dx$ (13) $\int (3x^2 - x + 2)e^{-x}\,dx$ (14) $\int (x^2 + x + 1)\sin x\,dx$

(15) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ (16) $\int \cos\sqrt{x}\,dx$ (17) $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ } ch.

## Trigonometric Integrals تكامل الدوال المثلثية (2)

(a) لإيجاد تكامل $\int \sin^n x \cos^m x\,dx$ نتبع الآتي:-

(1) عندما $n$ عدد فردي موجب و $m$ عدد حقيقي فإننا نستخدم المطابقة

$$\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$$

$$\sin^n x = (1 - \cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sin x$$

ثم نفرض $u = \cos x$ لذلك فإن $du = -\sin x\,dx$ وبالتعويض في التكامل كالآتي:-

$$\int \sin^n x \cos^m x\,dx = \int (1 - \cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sin x \cos^m x\,dx$$

$$= \int (1 - u^2)^{\frac{n-1}{2}} u^m (-du)$$

$$= -\int (1 - u^2)^{\frac{n-1}{2}} u^m\,du$$

ثم نجد التكامل باستخدام قوانين التكامل السابقة وكما هو موضح في الأمثلة الآتية:-

**Example : Find the integral**

ⓐ $\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx$ ⓑ $\int \sin^3 x\, dx$ ⓒ $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$

Solu

ⓐ $\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx$

$n=5$ (odd) فردي and $m=2$

$$\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx = \int \sin x \cdot \sin^4 x \cos^2 x\, dx$$
$$= \int \sin x (\sin^2 x)^2 \cos^2 x\, dx$$
$$= \int \sin x (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x\, dx$$

Let $u = \cos x \longrightarrow du = -\sin x\, dx$

$$\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx = \int (1-u^2)^2 u^2 (-du)$$
$$= -\int (1-u^2)^2 u^2\, du = -\int (1-2u^2+u^4) u^2\, du$$
$$= -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)\, du = -\left[\frac{u^3}{3} - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7\right] + C$$
$$\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$$

ⓑ $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx$

Let $u = \cos x \longrightarrow du = -\sin x\, dx$ (ثم عوض واكمل الحل)

② عندما $m$ عدد فردي موجب و $n$ عدد حقيقي فإننا نستخدم الطريقة

$$\cos^m x = \cos^{m-1} x \cdot \cos x = (1-\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \cos x$$

ثم نفرض $u = \sin x$ لذلك فإن $du = \cos x\, dx$ وبالتعويض يلي

الحالة الثالثة

$$\int \sin^n x \cos^m x\,dx = \int \sin^n x (1-\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cos x\,dx$$

$$= \int u^n (1-u^2)^{\frac{m-1}{2}}\,du$$

ثم نجد التكامل باستخدام قوانين التكامل السابقة وكما هو موضح في الأمثلة الآتية

Examples: Find the integrals

ⓐ $\int \sin^{\frac{2}{5}} x \cos^3 x\,dx$ ⓑ $\int \cos^5 x\,dx$ ⓒ $\int \sin^4 x \cos^5 x\,dx$

Solu

ⓐ $\int \sin^{\frac{2}{5}} x \cos^3 x\,dx \longrightarrow n=\frac{2}{5}$ and $m=3$ (odd فردي)

$$\therefore \int \sin^{\frac{2}{5}} x \cos^3 x\,dx = \int \sin^{\frac{2}{5}} x \cos^2 x \cos x\,dx$$

$$= \int \sin^{\frac{2}{5}} x (1-\sin^2 x) \cos x\,dx$$

Let $u = \sin x \longrightarrow du = \cos x\,dx$

$$\therefore \int \sin^{\frac{2}{5}} x \cos^3 x\,dx = \int u^{\frac{2}{5}} (1-u^2)\,du = \int (u^{\frac{2}{5}} - u^{\frac{12}{5}})\,du$$

$$= \frac{5}{7} u^{\frac{7}{5}} - \frac{5}{17} u^{\frac{17}{5}} + c$$

$$\therefore \int \sin^{\frac{2}{5}} x \cos^3 x\,dx = \frac{5}{7} \sin^{\frac{7}{5}} x - \frac{5}{17} \sin^{\frac{17}{5}} x + c$$

③ اذا كان $n$ , $m$ عددين صحيحين زوجيين موجبين في هذه الحالة نستخدم العلاقتين التاليتين:

① $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ ② $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

والتي تسمى بقانون خفض الزاوية وكما هو موضح في الأمثلة الآتية

Examples: Find the integral

① ⓐ $\int \sin^2 x\,dx$ ⓑ $\int \cos^2 x\,dx$ ⓒ $\int \sin^4 x\,dx$ ⓓ $\int \cos^4 x\,dx$

Solu

ⓐ $\int \sin^2 x\,dx = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$\therefore \int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

ⓓ $\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x)^2\,dx$

$= \int (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x)\,dx$

$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx$

$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x)\,dx$

$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx$

$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\int 4\cos 4x\,dx$

$\therefore \int \cos^4 x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

② ⓐ $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$ ⓑ $\int \sin^4 x \cos^4 x\,dx$

Solu

ⓐ $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x)^2\,dx$

$= \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x)\,dx$

$= \int (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x)\,dx$

$= \int (\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{8}\cos^2 2x - \frac{1}{8}\cos^3 2x)\,dx$

$= \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx$ (لم اكمل الحل)

ملاحظة: لا يهمك كل من

① $\int \sin mx \cos nx\, dx$ ② $\int \sin mx \sin nx\, dx$ ③ $\int \cos mx \cos nx\, dx$

حيث إن $m$ و $n$ أعداد حقيقية و $m \neq n$ نستخدم العلاقات التالية

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\sin(x-y) + \frac{1}{2}\sin(x+y)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\cos(x-y) + \frac{1}{2}\cos(x+y)$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - \frac{1}{2}\cos(x+y)$$

Examples

① $\int \sin 7x \cos 3x\, dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin(7-3)x + \frac{1}{2}\sin(7+3)x\right) dx$

$= \frac{1}{2}\int \sin 4x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin 10x\, dx$

$= \frac{1}{8}\int 4\sin 4x\, dx + \frac{1}{20}\int 10\sin 10x\, dx = \frac{-1}{8}\cos 4x - \frac{1}{20}\cos 10x + c$

$\therefore \int \sin 7x \cos 3x\, dx = \frac{-1}{8}\cos 4x - \frac{1}{20}\cos 10x + c$

② $\int \sin 2x \sin 4x\, dx = \int \left[\frac{1}{2}\cos(2-4)x - \frac{1}{2}\cos(2+4)x\right] dx$

$= \frac{1}{2}\int \cos(-2x)\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x\, dx$

$= \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\, dx - \frac{1}{12}\int 6\cos 6x\, dx$

$\therefore \int \sin 2x \sin 4x\, dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$

③ $\int \cos 5x \cos 3x\, dx$ (ch.)

Exercise: Find ① $\int \cos^5 x \sin x\, dx$ ② $\int \sin^2(5x)\, dx$ ③ $\int \cos^2(3x)\, dx$

④ $\int \sin^2(2x)\cos^3(2x)\, dx$ ⑤ $\int \sin^3(2x)\cos^2(2x)\, dx$ ⑥ $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$

⑦ $\int \sin 4x \cos 4x\, dx$ ⑧ $\int \sin x \cos 2x\, dx$ ⑨ $\int \cos 3x \cos 2x\, dx$

(b) لإيجاد تكامل من النوع التالي: $\int \tan^n x \sec^m x \, dx$

① عندما $n$ عدد فردي موجب و $m$ عدد حقيقي فإننا نستخدم المتطابقة

$$\tan^n x = \tan^{n-1} x \tan x = (\sec^2 x - 1)^{\frac{n-1}{2}} \tan x$$

ثم نفرض $u = \sec x$ لذلك فإن $du = \sec x \tan x \, dx$ ومن ثم يصبح التكامل كالتالي:

$$\int \tan^n x \sec^m x \, dx = \int (\sec^2 x - 1)^{\frac{n-1}{2}} \tan x \sec^m x \, dx$$

$$= \int (u^2 - 1)^{\frac{n-1}{2}} u^{m-1} \, du$$

ثم نجد التكامل باستخدام قوانين التكامل السابقة وكما هو موضح في الأمثلة التالية:

Examples: Find the integrals

① $\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx = \int \tan x \tan^2 x \sec^3 x \, dx$

$$= \int \tan x (\sec^2 x - 1) \sec^3 x \, dx$$

Let $u = \sec x \longrightarrow du = \sec x \tan x \, dx$

$$\therefore \int \tan^3 x \sec^3 x \, dx = \int (u^2 - 1) u^2 \, du = \int (u^4 - u^2) \, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + c$$

$$\therefore \int \tan^3 x \sec^3 x \, dx = \frac{1}{5} \sec^5 x - \frac{1}{3} \sec^3 x + c$$

② $\int \tan x \sec^{\frac{3}{2}} x \, dx = \int (\sec x)^{\frac{1}{2}} \tan x \sec x \, dx = \frac{\sec^{\frac{3}{2}} x}{\frac{3}{2}} + c$

or $n = 1$ and $m = \frac{3}{2} \longrightarrow u = \sec x \quad \therefore du = \sec x \tan x \, dx$

$$\therefore \int \tan x \sec^{\frac{3}{2}} x \, dx = \int \tan x \sec x \sec^{\frac{1}{2}} x \, dx = \int u^{\frac{1}{2}} \, du$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \longrightarrow \int \tan x \sec^{\frac{3}{2}} x \, dx = \frac{2}{3} \sec^{\frac{3}{2}} x + c$$

③ ⓐ $\int \tan x\,dx$ ⓑ $\int \tan^3 x\,dx$ ⓒ $\int \tan^3(4x)\,dx$ ⓓ $\int \tan^5 x\,dx$

Solu

ⓐ $$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

ⓓ $$\int \tan^5 x\,dx = \int \tan x(\tan^2 x)^2\,dx = \int \tan x(\sec^2 x - 1)^2\,dx$$

$$= \int \tan x(\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1)\,dx$$

$$\therefore \int \tan^5 x\,dx = \int \tan x \sec^4 x\,dx - 2\int \tan x \sec^2 x\,dx + \int \tan x\,dx$$

Let $u = \sec x \longrightarrow du = \sec x \tan x\,dx$

$$\therefore \int \tan^5 x\,dx = \int u^3\,du - 2\int u\,du - \ln|\cos x| + c$$

$$= \frac{1}{4}u^4 - u^2 - \ln|\cos x| + c$$

$$\therefore \int \tan^5 x\,dx = \frac{1}{4}\sec^4 x - \sec^2 x - \ln|\cos x| + c$$

② عندما $m$ عدد زوجي موجب و $n$ عدد حقيقي فأننا نستخدم المطابقة

$$\sec^m x = \sec^{m-2} x \cdot \sec^2 x = (1+\tan^2 x)^{\frac{m-2}{2}} \cdot \sec^2 x$$

ثم نفرض أن $u = \tan x$ لذلك فأن $du = \sec^2 x\,dx$ ومن ثم نتابع التكامل كما يلي:

$$\int \tan^n x \sec^m x\,dx = \int \tan^n x \cdot (1+\tan^2 x)^{\frac{m-2}{2}} \cdot \sec^2 x\,dx$$

$$= \int u^n (1+u^2)^{\frac{m-2}{2}}\,du$$

ثم نجد التكامل بأستخدام قوانين التكامل السابقة وكما هو موضح في الأمثلة الآتية:

Examples: Find

① $$\int \tan^2 x \sec^4 x\,dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x\,dx$$

$$= \int \tan^2 x (1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx$$

~~Let $u = \tan x \longrightarrow du = \sec^2 x\, dx$~~

$\therefore \int \tan^2 x \sec^4 x\, dx = \int u^2(1+u^2)\, du = \int (u^2+u^4)\, du = \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C$

$\therefore \int \tan^2 x \sec^4 x\, dx = \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C$

② $\int \sec^6 x\, dx = \int \sec^4 x \sec^2 x\, dx = \int (\sec^2 x)^2 \sec^2 x\, dx$

$= \int (1+\tan^2 x)^2 \sec^2 x\, dx$

Let $u = \tan x \longrightarrow du = \sec^2 x\, dx \longrightarrow \int \sec^6 x\, dx = \int (1+u^2)^2\, du$

$\int \sec^6 x\, dx = \int (1+2u^2+u^4)\, du = u + \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C$

$\therefore \int \sec^6 x\, dx = \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C$

③ $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

③ عندما $m=0$ و $n$ عدد زوجي موجب فإننا نستخدم العلاقة
$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

Examples: Find

① $\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \int \sec^2 x\, dx - \int dx = \tan x - x + C$

② $\int \tan^4 x\, dx = \int \tan^2 x \tan^2 x\, dx = \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1)\, dx$

$= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x\, dx$

$\int \tan^4 x\, dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$

④ عندما $m$ عدد فردي موجب و $n=0$ فإننا نستخدم طريقة التجزئة في الأول

Examples:

① $\int \sec x\, dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$

~~$\therefore \int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$~~

② $\int \sec^3 x\,dx = \int \underbrace{\sec x}_{u}\ \underbrace{\sec^2 x\,dx}_{dv} = \int u\,dv$

$= uv - \int v\,du$

$= \sec x \tan x - \int \tan x \sec x \tan x\,dx$

$= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\,dx$

$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\,dx$

$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$

$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$

$\therefore \int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$

⑤ عندما $n$ عدد زوجي و $m$ عدد فردي فإننا نستخدم العلاقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ثم نستخدم طريقة التجزئة في الأول.

Example

① ⓐ $\int \tan^2 x \sec x\,dx$ ⓑ $\int \tan^2 x \sec^3 x\,dx$

Solu

ⓐ $\int \tan^2 x \sec x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec x\,dx$

$= \int \sec^3 x\,dx - \int \sec x\,dx$

$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x\,dx$

$du = \sec x \tan x\,dx \qquad v = \tan x$

$\therefore \int \tan^2 x \sec x\,dx = \underbrace{\sec x \tan x}_{uv} - \int \underbrace{\tan x \sec x \tan x\,dx}_{v\,du} - \int \sec x\,dx$

$\therefore \int \tan^2 x \sec x\,dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\,dx - \int \sec x\,dx$

$2\int \tan^2 x \sec x\,dx = \sec x \tan x - \ln|\sec x + \tan x|$

$\therefore \int \tan^2 x \sec x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$

ملاحظة: بما أن $1+\cot^2 x = \csc^2 x$ فإنه من الممكن إيجاد تكامل

$\int \tan^n x \sec^m x\,dx$ بنفس طريقة تكامل $\int \cot^n x \csc^m x\,dx$

Exercise: Find ① $\int \tan^3 x \sec^5 x\,dx$ ② $\int \tan(2x)\sec^3(2x)\,dx$

③ $\int \tan x \sec^5 x\,dx$ ④ $\int \sec^2(3x+1)\,dx$ ⑤ $\int \sqrt{\tan x}\sec^4 x\,dx$

⑥ $\int \sec^4 x\,dx$ ⑦ $\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx$ ⑧ $\int \tan^5 x \sec^4 x\,dx$

⑨ $\int \tan^3(4x)\sec^4(4x)\,dx$ ⑩ $\int \sec 2x\,dx$ ⑪ $\int \tan^4 x \sec x\,dx$

## ③ التعويضات المثلثية (Trigonometric substitutions)

من الممكن إيجاد بعض التكاملات التي يكون فيها المكامل بالصورة $x^2-a^2$ ، $\sqrt{x^2-a^2}$ ، $a^2+x^2$ ، $\sqrt{a^2+x^2}$ ، $a^2-x^2$ ، $\sqrt{a^2-x^2}$ حيث أن $(a>0)$ بالتعويض بدلالة الدوال المثلثية:-

فإذا كان المكامل $\sqrt{a^2-x^2}$ أو $a^2-x^2$ فنعوض $x = a\sin\theta$

أما إذا كان المكامل $\sqrt{a^2+x^2}$ أو $a^2+x^2$ فنعوض $x = a\tan\theta$

أما إذا كان المكامل $\sqrt{x^2-a^2}$ أو $x^2-a^2$ فنعوض $x = a\sec\theta$

وكما هو موضح في المثلثة التالية.

Examples

① $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$ (بموجب قانون أو خذ سابقاً)

~~or Let $x = 2\sin\theta \longrightarrow dx = 2\cos\theta\, d\theta$~~

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}} = \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}} = \int \frac{2\cos\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta}}\, d\theta$

$= \int \frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}\, d\theta = \int d\theta = \theta + c$

$\therefore x = 2\sin\theta \longrightarrow \sin\theta = \frac{x}{2} \longrightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \theta + c = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

② $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}} \longrightarrow$ Let $x = 3\sin\theta \longrightarrow dx = 3\cos\theta\, d\theta$ & $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

$\therefore \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{(3\sin\theta)^2}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}} \cdot 3\cos\theta\, d\theta = \int \frac{9\sin^2\theta}{\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}} \cdot 3\cos\theta\, d\theta$

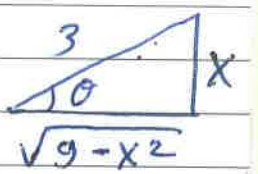
$= \int \frac{9\sin^2\theta}{\sqrt{9\cos^2\theta}} \cdot 3\cos\theta\, d\theta = \int \frac{9\sin^2\theta}{3\cos\theta} \cdot 3\cos\theta\, d\theta$

$= 9\int \sin^2\theta\, d\theta = 9\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$

$= \frac{9}{2}\int d\theta - \frac{9}{2}\int \cos 2\theta\, d\theta = \frac{9}{2}\theta - \frac{9}{4}\sin 2\theta + c$

$= \frac{9}{2}\theta - \frac{9}{4} \cdot 2\sin\theta\cos\theta + c = \frac{9}{2}\theta - \frac{9}{2}\sin\theta\cos\theta + c$

$\therefore \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{9}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + c$




$\therefore \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{2} \cdot \sqrt{9-x^2} + c$

③ $\int \sqrt{1-4x^2}\,dx = \int \sqrt{1-(2x)^2}\,dx$ ← Let $2x = \sin\theta$

$\rightarrow 2\,dx = \cos\theta\,d\theta \rightarrow dx = \frac{\cos\theta}{2}\,d\theta$ & $\theta = \sin^{-1}(2x)$

(ثم عوض واكمل اكل)

④ $\int \frac{dx}{x^2+16} = \frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + c$ (بموجب قانون اخذ سابقاً)

or Let $x = 4\tan\theta \rightarrow dx = 4\sec^2\theta\,d\theta$ & $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)$

$\therefore \int \frac{dx}{x^2+16} = \int \frac{4\sec^2\theta\,d\theta}{16\tan^2\theta+16} = \int \frac{4\sec^2\theta\cdot d\theta}{16(\tan^2\theta+1)} = \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{4\sec^2\theta}$

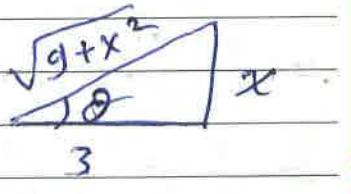
$= \frac{1}{4}\int d\theta = \frac{1}{4}\theta + c = \frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + c$

⑤ $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} \rightarrow x = 3\tan\theta \rightarrow dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$ & $\tan\theta = \frac{x}{3}$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \int \frac{3\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{9+9\tan^2\theta}} = \int \frac{3\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{9(1+\tan^2\theta)}} = \int \frac{3\sec^2\theta\,d\theta}{3\sec\theta}$

$= \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{x}{3}\right| + c$




⑥ $\int \frac{x^3\,dx}{(3+x^2)^{\frac{5}{2}}} \rightarrow x = \sqrt{3}\tan\theta \rightarrow dx = \sqrt{3}\sec^2\theta\,d\theta$

(ثم عوض واكمل اكل)

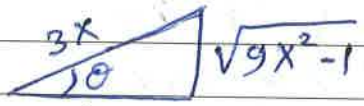
⑦ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\sec^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + c$ (بموجب قانون اخذ سابقاً)

~~or Let $x=\sqrt{5}\sec\theta \rightarrow dx=\sqrt{5}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ & $\theta=\sec^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)$~~

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-5}} = \int \frac{\sqrt{5}\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\sqrt{5}\sec\theta\sqrt{5\sec^2\theta-5}} = \int \frac{\tan\theta\,d\theta}{\sqrt{5}\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int d\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}\theta + c = \frac{1}{\sqrt{5}}\sec^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c$$

⑧ $\int \frac{\sqrt{9x^2-1}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{(3x)^2-1}}{x}\,dx$




∴ Let $3x=\sec\theta \rightarrow 3dx=\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{9x^2-1}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta/3}\cdot\frac{\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{3}$$

$$= \int \tan\theta\cdot\tan\theta\,d\theta = \int \tan^2\theta\,d\theta = \int(\sec^2\theta-1)\,d\theta$$

$$= \tan\theta-\theta+c = \sqrt{9x^2-1} - \sec^{-1}(3x)+c$$

⑨ $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-9}} \rightarrow 2x=3\sec\theta \rightarrow 2dx=3\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{\frac{3}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\frac{9}{4}\sec^2\theta\sqrt{9\sec^2\theta-9}}$$

(ثم بسط, اكمل الحل)

Exercise: Find ① $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ ② $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}}$ ③ $\int x^3\sqrt{16-x^2}\,dx$

④ $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$ ⑤ $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ⑥ $\int \frac{dx}{(4+x^2)^2}$ ⑦ $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$ ⑧ $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}}$

⑨ $\int \frac{dx}{(9x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$ ⑩ $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$ ⑪ $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}}$ ⑫ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ ⑬ $\int \frac{\sqrt{2x^2-4}}{x}\,dx$

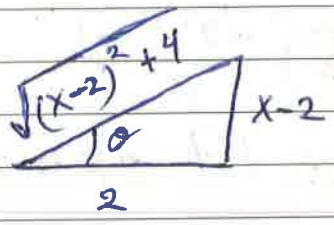
④ تكاملات من النوع $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ أو $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$

الحل هذا النوع من التكاملات يتم أولاً بإكمال المربع ومن ثم استخدام طريقة التعويضات المثلثية.

Examples: Find

① $\int \frac{x\,dx}{x^2-4x+8}$




$x^2-4x+8 = (x^2-4x+4)+8-4 = (x-2)^2+4$

$\therefore \int \frac{x\,dx}{x^2-4x+8} = \int \frac{x\,dx}{(x-2)^2+4}$ ⟹ Let $x-2 = 2\tan\theta$

$\therefore dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$

$\therefore \int \frac{x\,dx}{(x-2)^2+4} = \int \frac{(2+2\tan\theta)\cdot 2\sec^2\theta\,d\theta}{4\tan^2\theta+4} = \int \frac{4(1+\tan\theta)\sec^2\theta\,d\theta}{4\sec^2\theta}$

$= \int (1+\tan\theta)\,d\theta = \int d\theta + \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta = \theta - \ln|\cos\theta| + c$

$\therefore \int \frac{x\,dx}{x^2-4x+8} = \tan^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - \ln\left|\frac{2}{\sqrt{(x-2)^2+4}}\right| + c$

② $\int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$ ⟹ $8+2x-x^2 = 8-(x^2-2x) = 8-(x^2-2x+1-1)$

$= 8-(x^2-2x+1)+1 = 9-(x-1)^2$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}}$ ⟹ Let $x-1 = 3\sin\theta$ ⟹ $dx = 3\cos\theta\,d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}} = \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}} = \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{3\cos\theta}$$

$$= \int d\theta = \theta + c = \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right) + c$$

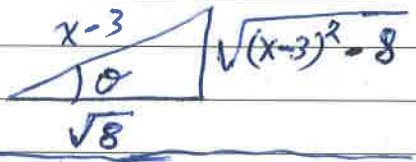
③ $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9-9+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-8}}$$

$\longrightarrow$ Let $x-3 = \sqrt{8}\cdot\sec\theta \longrightarrow dx = \sqrt{8}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-8}} = \int \frac{\sqrt{8}\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\sqrt{8\sec^2\theta-8}}$$

$$= \int \frac{\sqrt{8}\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\sqrt{8}\tan\theta} = \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+1}} = \ln\left|\frac{x-3}{\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{(x-3)^2-8}}{\sqrt{8}}\right| + c$$




Exercises: Find ① $\int \frac{dx}{x^2-4x+13}$ ② $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ ③ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$

④ $\int \frac{x\,dx}{x^2+6x+10}$ ⑤ $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$ ⑥ $\int \frac{dx}{2x^2+4x+7}$ ⑦ $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

## ⑤ التكامل بالكسور الجزئية (Integration by partial Fractions)

إن عملية تجزئة الكسر الى كسور جزئية بسيطة تفيدنا في اجراء عملية التكامل للكسور المعقدة بتجزئتها الى كسور بسيطة ثم تكاملها بسهولة. في الحقيقة إن عملية تجزئة الكسر هي العملية العكسية لجمع الكسور.

لقد سبق وأن عرفنا الدالة f بأنها متعددة حدود من الدرجة n اذا كانت بالشكل:-

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

~~حيث إن $q_n \neq 0$ و $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$ أعداد حقيقية~~

و n عدد صحيح غير سالب.

وكذلك قلنا للدالة $Q(x)$ نسبية اذا كانت بالشكل :-

$$Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

حيث إن كلاً من $f(x)$ و $g(x)$ متعددة حدود.

فإذا كانت درجة متعددة الحدود $f(x)$ أكبر أو مساوية الى درجة متعددة الحدود $g(x)$ فإن $Q(x)$ يمكن كتابتها بالشكل الآتي :-

$$Q(x) = h(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

حيث إن $r(x)$ و $h(x)$ متعددة حدود ودرجة $r(x)$ اقل من درجة $g(x)$ وبذلك فإن :-

$$\int Q(x)\,dx = \int h(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{g(x)}\,dx$$

وبما أن كل دالة نسبية بالشكل $\frac{r(x)}{g(x)}$ يمكن كتابتها كمجموع دوال بالشكل $\frac{A}{(X-a)^n}$ و $\frac{AX+B}{(x^2+bx+c)^n}$ وبطريقة واحدة فقط حيث إن $n = 1, 2, 3, \ldots$ وعليه فلإيجاد التكامل $\int \frac{r(x)}{g(x)}\,dx$ هنالك عدة احتمالات منها :-

① إذا كانت عوامل $g(x)$ خطية غير مكررة ومن الشكل $(ax+b)$ فلتجزئة $\frac{r(x)}{g(x)}$ فإننا نقابل كل عامل من هذه العوامل بالدالة $\frac{A}{ax+b}$ حيث إن A عدد حقيقي ينبغي ايجاده والمثال الآتي يوضح ذلك.

Example: Find ⓐ $\int \frac{5X-10}{x^2-3X-4}\,dx$ ⓑ $\int \frac{dx}{x^2+X-2}$

ⓐ $$\int \frac{5X-10}{x^2-3X-4}\,dx = \int \frac{5X-10}{(X+1)(X-4)}\,dx$$

$$\therefore \frac{5X-10}{(X+1)(X-4)} = \frac{A}{X+1} + \frac{B}{X-4} = \frac{A(X-4)+B(X+1)}{(X+1)(X-4)}$$

وبضرب الطرفين في $(X+1)(X-4)$ ينتج أن :-

$$\begin{aligned} 5X-10 &= A(X-4)+B(X+1) \\ &= AX-4A+BX+B \\ 5X-10 &= (A+B)X+(-4A+B) \end{aligned}$$

نساوي معاملات قوى x للطرفين ينتج أن :-

$$5 = A+B$$
$$-10 = -4A+B$$

بالطرح

$$15 = 5A \longrightarrow A=3 \longrightarrow B=2$$

$$\therefore \frac{5X-10}{(X+1)(X-4)} = \frac{3}{X+1} + \frac{2}{X-4}$$

$$\therefore \int \frac{5X-10}{(X+1)(X-4)}\,dx = \int \frac{3\,dx}{X+1} + \int \frac{2\,dx}{X-4}$$
$$= 3\int \frac{dx}{X+1} + 2\int \frac{dx}{X-4}$$

$$\therefore \int \frac{5X-10}{X^2-3X-4}\,dx = 3\ln|X+1| + 2\ln|X-4| + C$$

② اذا كانت عوامل $g(x)$ غير مكررة من المرات عند ذلك تكون الدوال الناتجة للعامل $(aX+b)^n$ هي :-

$$\frac{A_1}{aX+b} + \frac{A_2}{(aX+b)^2} + \cdots\cdots + \frac{A_n}{(aX+b)^n}$$

حيث أن $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ اعداد حقيقية ينبغي ايجادها

Example: Find $\int \frac{2X+4}{X^3-2X^2}\,dx$ والمثال الآتي يوضح ذلك

$$\int \frac{2X+4}{X^3-2X^2}\,dx = \int \frac{2X+4}{X^2(X-2)}\,dx$$

$$\therefore \frac{2X+4}{X^2(X-2)} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X^2} + \frac{C}{X-2}$$

$$\frac{2X+4}{X^2(X-2)} = \frac{AX(X-2)+B(X-2)+CX^2}{X^2(X-2)}$$

بضرب الطرفين بـ $X^2(X-2)$ ينتج أن :-

$$2X+4 = AX(X-2)+B(X-2)+CX^2$$
$$= AX^2-2AX+BX-2B+CX^2$$

$$2X+4 = (A+C)X^2+(-2A+B)X-2B$$

بمساواة معاملات قوى $X$ للطرفين ينتج أن :-

$A+C=0$ ⟶ $C=2$

$-2A+B=2$ ⟶ $A=-2$

$-2B=4$ ⟶ $B=-2$

$$\therefore \frac{2X+4}{X^2(X-2)} = \frac{-2}{X} + \frac{-2}{X^2} + \frac{2}{X-2}$$

$$\therefore \int \frac{2X+4}{X^2(X-2)}\,dx = -2\int \frac{dx}{X} - 2\int \frac{dx}{X^2} + 2\int \frac{dx}{X-2}$$
$$= -2\ln|x| - 2\int x^{-2}\,dx + 2\ln|X-2|$$

$$\therefore \int \frac{2X+4}{X^3-2X^2}\,dx = -2\ln|x| + \frac{2}{X} + 2\ln|X-2| + C$$

③ اذا كانت عوامل $g(x)$ من الدرجة الثانية ومن الشكل $(ax^2+bx+c)$ وغير مكررة وغير قابلة للتحويل لعوامل خطية حقيقية فإن الحالة العامة لهذا العامل هي :-

$$\frac{AX+B}{aX^2+bX+C}$$

~~حيث أن A و B عددان حقيقيان ينبغي ايجادهما وكما هو موضح~~
في الأمثلة الآتية:-

Examples: Find the integrals

① $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx = \int \frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

$\therefore \frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{AX+B}{x^2+1} + \frac{CX+D}{x^2+2}$

$\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{(AX+B)(x^2+2)+(CX+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)}$

بضرب الطرفين بـ $(x^2+1)(x^2+2)$ ينتج أن:

$x^3+x^2+x+2 = (AX+B)(x^2+2)+(CX+D)(x^2+1)$

$x^3+x^2+x+2 = AX^3+2AX+BX^2+2B+CX^3+CX+DX^2+D$

بمساواة معاملات قوى X للطرفين ينتج أن:

$A+C=1$
$B+D=1$
$2A+C=1$
$2B+D=2$

بالطرح ← $A=0 \Rightarrow C=1$

بالطرح ← $B=1 \Rightarrow D=0$

$\therefore \frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+2}$

$\therefore \int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{x^2+2} = \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+2}$

$= \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + c$

② $\int \frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1}\,dx = \int \frac{x^2+x-2}{x^2(3x-1)+(3x-1)}\,dx = \int \frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)}\,dx$

$$\therefore \frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(3x-1)}{(3x-1)(x^2+1)}$$

بضرب الطرفين في $(3x-1)(x^2+1)$ ينتج أن :-

$$x^2+x-2 = A(x^2+1)+(Bx+C)(3x-1)$$
$$x^2+x-2 = Ax^2+A+3Bx^2-Bx+3Cx-C$$
$$x^2+x-2 = (A+3B)x^2+(-B+3C)x+(A-C)$$

بمساوي معاملات قوى $x$ للطرفين ينتج أن :-

$$\begin{matrix} A+3B=1 \\ -B+3C=1 \\ A-C=-2 \end{matrix} \xleftarrow{\text{بالطرح}} \begin{matrix} 3B+C=3 \\ -B+3C=1 \end{matrix} \longrightarrow 10C=6 \Rightarrow C=\frac{3}{5}$$

$$\therefore A=\frac{-7}{5} \text{ and } B=\frac{4}{5}$$

$$\therefore \frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)} = \frac{\frac{-7}{5}}{3x-1} + \frac{\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}}{x^2+1}$$

$$\therefore \int \frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1}\,dx = \frac{-7}{5}\int \frac{dx}{3x-1} + \frac{4}{5}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{-7}{15}\int \frac{3\,dx}{3x-1} + \frac{4}{10}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} + \frac{3}{5}\tan^{-1}x$$

$$\therefore \int \frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1}\,dx = \frac{-7}{15}\ln|3x-1| + \frac{2}{5}\ln|x^2+1| + \frac{3}{5}\tan^{-1}x + c$$

(4) اذا كانت عوامل $g(x)$ من الدرجة الثانية ومن الشكل $(ax^2+bx+c)^n$ حيث إن $n$ عدد صحيح موجب أكبر من الواحد (أي مكررة $n$ من المرات) فإننا نقابل هذا العامل بالمجموع الآتي :-

$$\frac{A_1X+B_1}{(ax^2+bx+c)}+\frac{A_2X+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots\cdots+\frac{A_nX+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

حيث أن $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ ثوابت حقيقية يتم إيجادها بكل مرة موضح في الأمثلة الآتية :-

Examples: Find $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx$

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{AX+B}{(x^2+1)}+\frac{cX+D}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{(AX+B)(x^2+1)+cX+D}{(x^2+1)^2}$$

بضرب الطرفين في $(x^2+1)^2$ ينتج أن :-

$$2x^2+3=(AX+B)(x^2+1)+cX+D$$
$$=Ax^3+AX+Bx^2+B+cX+D$$

$$2x^2+3=Ax^3+Bx^2+(A+c)X+(B+D)$$

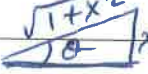
بمساواة معاملات قوى x للطرفين ينتج أن :-

$A=0$ and $B=2$ and $A+c=0 \rightarrow c=0$ and $B+D=3 \rightarrow D=1$

$$\therefore \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{2}{x^2+1}+\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

$$\therefore \int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx=2\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=2\tan^{-1}x+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Let $x=\tan\theta \rightarrow dx=\sec^2\theta\,d\theta$




$$\therefore \int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^4\theta}=\int\frac{d\theta}{\sec^2\theta}=\int\cos^2\theta\,d\theta=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int d\theta+\frac{1}{2}\int\cos 2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta+c=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+c$$

$$\therefore \int\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx=2\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+c$$

ملاحظة :- ① نطبق طريقة تجزئة الكسور اذا كانت درجة متعددة الحدود في البسط اقل من درجة متعددة الحدود في المقام .

② اذا كانت درجة متعددة الحدود في البسط اكبر أو مساوية الى درجة متعددة الحدود في المقام نستخدم القسمة الطويلة وكما هو موضح في المثال الاتي :-

Example: Find $\int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+x-1}{x^2+x-2}\,dx$

بما أن درجة متعددة الحدود في البسط اعلى من درجة متعددة الحدود في المقام لذلك نستخدم القسمة الطويلة

$$\frac{3x^4+3x^3-5x^2+x-1}{x^2+x-2} = 3x^2+1+\frac{1}{x^2+x-2}$$

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2+1 \\ \hline x^2+x-2 & 3x^4+3x^3-5x^2+x-1 \\ \text{بالطرح} & 3x^4+3x^3-6x^2 \\ \hline & 0+0+x^2+x-1 \\ \text{بالطرح} & x^2+x-2 \\ \hline & 0+0+1 \end{array}$$

$$\therefore \int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+x-1}{x^2+x-2}\,dx = \int (3x^2+1)\,dx + \int \frac{dx}{x^2+x-2}$$

$$= x^3+x+\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} \longrightarrow (1)$$

نجد هذا التكامل بتجزئة الكسور

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A-B)}{(x-1)(x+2)}$$

بضرب الطرفين بـ $(x-1)(x+2)$ ينتج أن :-

$$1 = (A+B)x+(2A-B)$$

بمساواة معاملات قوى x للطرفين ينتج أن :-

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A-B=1 \end{array}\right\} \text{بالجمع} \Rightarrow 3A=1 \longrightarrow A=\frac{1}{3} \text{ and } B=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + c$$

بالتعويض في ① ينتج أن

$$\int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+x-1}{x^2+x-2}\,dx = x^3+x+\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + c$$

مثال :-

① $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x-8}\,dx = \ln|x^3+2x-8| + c$

② $\int \frac{2x-1}{x^2+1}dx = \int \frac{2x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} = \ln|x^2+1| - \tan^{-1}x + c$

**Exercise:** Find the integrals

① $\int \frac{dx}{x^2+3x-4}$ ② $\int \frac{x\,dx}{x^2-5x+6}$ ③ $\int \frac{11x+17}{2x^2+7x-4}dx$ ④ $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

⑤ $\int \frac{2x^2-9x-9}{x^3-9x}dx$ ⑥ $\int \frac{x^2+2}{x+2}dx$ ⑦ $\int \frac{3x^2-10}{x^2-4x+4}dx$ ⑧ $\int \frac{x^3\,dx}{x^2-3x+2}$

⑨ $\int \frac{x^5+2x^2+1}{x^3-x}dx$ ⑩ $\int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}dx$ ⑪ $\int \frac{x^2+x-16}{(x+1)(x-3)^2}dx$

⑫ $\int \frac{2x^2-1}{(4x-1)(x^2+1)}dx$ ⑬ $\int \frac{x^3+3x^2+x+9}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$ ⑭ $\int \frac{x^3-3x^2+2x-3}{x^2+1}dx$

## ⑥ تكامل الدوال التي تحوي جذوراً

يمكن ايجاد تكامل الدوال التي تحوي جذوراً كما هو موضح في الأمثلة التالية:

**Examples:** Find the integrals

① $\int \frac{dx}{2+2\sqrt{x}}$ نفرض الجذر $\longrightarrow$ Let $u=\sqrt{x} \longrightarrow x=u^2 \longrightarrow dx=2u\,du$

$\therefore \int \frac{dx}{2+2\sqrt{x}} = \int \frac{2u\,du}{2+2u} = \int \frac{u\,du}{u+1} = \int \frac{(u+1-1)}{u+1}du$

$= \int \frac{u+1}{u+1}du - \int \frac{du}{u+1} = \int du - \int \frac{du}{u+1} = u - \ln|u+1| + c$

$\therefore \int \frac{dx}{2+2\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \ln|\sqrt{x}+1| + c$

$\frac{1}{u+1}\overline{)\,u}$ ناتج القسمة $1$، والباقي $-1$

② $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$ العامل المشترك الأصغر للعددين 3 و 2 هو 6 لذلك نفرض أن:

Let $u=x^{\frac{1}{6}} \longrightarrow x=u^6 \longrightarrow dx=6u^5\,du$

$\therefore \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{\sqrt{u^6}}{1+\sqrt[3]{u^6}} \cdot 6u^5\,du = \int \frac{u^3 \cdot 6u^5\,du}{1+u^2} = \int \frac{6u^8\,du}{u^2+1}$

$$= 6\int \frac{u^8}{u^2+1}\,du$$

$$= 6\int \left(u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{u^2+1}\right)du$$

$$= 6\left[\frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} - u + \tan^{-1}u\right] + c$$

$$= \frac{6}{7}u^7 - \frac{6}{5}u^5 + 2u^3 - 6u + 6\tan^{-1}(u) + c$$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6\tan^{-1}(x^{\frac{1}{6}}) + c$$

$u^2+1 \;\big|\; u^8$

$u^8 + u^6$ باقي $-u^6$

$-u^6 - u^4$ باقي $u^4$

$u^4 + u^2$ باقي $-u^2$

$-u^2 - 1$ باقي $+1$

$u^6 - u^4 + u^2 - 1$

③ $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$ ← Let $u = \sqrt{1+e^x}$ ← $u^2 = 1+e^x$ ← $u^2 - 1 = e^x$

$$\rightarrow 2u\,du = e^x\,dx \rightarrow dx = \frac{2u\,du}{e^x} \rightarrow dx = \frac{2u\,du}{u^2-1}$$

$$\therefore \int \sqrt{1+e^x}\,dx = \int u \cdot \frac{2u\,du}{u^2-1} = \int \frac{2u^2}{u^2-1}\,du$$

$$= \int \left(2 + \frac{2}{u^2-1}\right)du = 2u + \int \frac{2\,du}{u^2-1} = 2u + \int \frac{2\,du}{(u-1)(u+1)} \quad (1)$$

نجد هذا التكامل بتجزئة الكسور

$$\frac{2}{(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} \rightarrow A = 1 \text{ and } B = -1$$

$$\therefore \frac{2}{(u-1)(u+1)} = \frac{1}{u-1} + \frac{-1}{u+1}$$

$$\therefore \int \frac{2\,du}{(u-1)(u+1)} = \int \frac{du}{u-1} - \int \frac{du}{u+1} = \ln|u-1| - \ln|u+1| + c$$

وبالتعويض في (1) ينتج أن:

$$\int \sqrt{1+e^x}\,dx = 2u + \ln|u-1| - \ln|u+1| + c$$

$$\therefore \int \sqrt{1+e^x}\,dx = 2\sqrt{1+e^x} + \ln\left|\sqrt{1+e^x} - 1\right| - \ln\left|\sqrt{1+e^x} + 1\right| + c$$

$2 \;\big|\; u^2-1 \;\big|\; 2u^2$

$2u^2 - 2$ باقي $+2$

## ② تكامل الدوال النسبية بالدوال المثلثية

اذا كانت الدالة المراد تكاملها نسبية بدوال مثلثية بسيطة اي $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ ، ... فانه يمكننا تحويلها الى دالة نسبية جبرية بتبديل المتغير حسب الفرضية الاتية :-

$$\boxed{z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \longrightarrow (1)$$

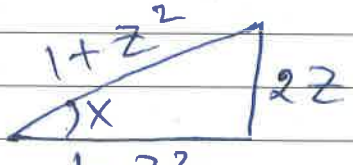
من خلال هذه الفرضية واستنادا الى المتطابقة المثلثية

$\tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$ نحصل على :-

$$\boxed{\tan x = \frac{2z}{1-z^2}} \longrightarrow (2)$$

ولأجل التعبير عن $\sin x$ و $\cos x$ وبقية النسب المثلثية بسهولة نرسم المثلث القائم استنادا الى معادلة (2) فتكون النسب كالاتي :-

$$\boxed{\sin x = \frac{2z}{1+z^2}} \text{ and } \boxed{\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}}$$




واخيرا نحصل على قيمة $dx$ من المعادلة (1) والتي هي :-

$$\boxed{dx = \frac{2dz}{1+z^2}}$$

Examples: Find the integrals

① $$\int \frac{dx}{1-\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1-\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{2dz}{(1+z^2)}}{\frac{1+z^2-2z+1-z^2}{(1+z^2)}}$$

$$= \int \frac{2\,dz}{2-2z} = \int \frac{dz}{1-z} = -\int \frac{-dz}{1-z} = -\ln|1-z| + c$$

$$= -\ln\left|1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

② $$\int \frac{dx}{\sin x + \tan x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2} + \frac{2z}{1-z^2}} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{\frac{2z-2z^3+2z+2z^3}{(1+z^2)(1-z^2)}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{\frac{4z}{(1+z^2)(1-z^2)}} = \int \frac{2}{(1+z^2)} \cdot \frac{(1+z^2)(1-z^2)}{4z}\,dz = \int \frac{(1-z^2)}{2z}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1-z^2}{z}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\,dz - \frac{1}{2}\int z\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\ln|z| - \frac{z^2}{4} + c = \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \frac{1}{4}\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

③ $$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{1-\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{2\,dz}{(1+z^2)}}{\frac{1+z^2-1+z^2}{(1+z^2)}} = \int \frac{2\,dz}{2z^2}$$

$$= \int \frac{dz}{z^2} = \int z^{-2}\,dz = \frac{-1}{z} + c = -\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + c$$

**Exercise: Find** ① $\int x\sqrt{x-2}\,dx$ ② $\int \frac{\sqrt{x-4}}{x}\,dx$ ③ $\int x^5\sqrt{x^3+1}\,dx$

④ $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}}$ ⑤ $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ ⑥ $\int \frac{dx}{x(1-x^{\frac{1}{4}})}$ ⑦ $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ ⑧ $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

⑨ $\int \sin\sqrt{x}\,dx$ ⑩ $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ ⑪ $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$ ⑫ $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$ ⑬ $\int \frac{dx}{x-\sqrt[3]{x}}$

⑭ $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$ ⑮ $\int \frac{dx}{2+\sin x}$ ⑯ $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ ⑰ $\int \frac{dx}{1+\sin x}$