

الفصل الثاني

البرمجة الخطية وطريقة
الحل البياني

تعتبر البرمجة الخطية من المواضيع الأساسية والمهمة في بحوث العمليات وتكمن أهميتها في كونها وسيلة لدراسة سلوك عدد كبير من الأنظمة، يقدم نموذج البرمجة الخطية طريقة كفاءة لتحديد القرار الأمثل (أو الاستراتيجية المثلى) من بين عدد كبير من البدائل، التي يخضع كل منها إلى مجموعة من المحددات والقيود، وبشكل يساهم بتحقيق أهداف الإدارة. وهي أداة بيانية ورياضية تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل بإحدى الطرق الآتية: طريقة البيانية، الطريقة المبسطة، طريقة النقل، طريقة التعيين والتخصيص....الخ.

I- مفهوم البرمجة الخطية:

تعد البرمجة الخطية إحدى الوسائل المهمة في حل كثير من المشاكل الإدارية والإقتصادية والعسكرية، وقد ازداد تطبيقها في الآونة الأخيرة نظرا للتقدم التكنولوجي الذي ساعد على تطوير الحسابات الالكترونية المستخدمة في حل مشاكل البرمجة. تم تطويرها واستخدامها بصورة فعلية في سنة 1947 على يد العالم الرياضي جورج دانترنغ (George Dantzing)، لحل بعض مشكلات التخطيط في السلاح الجو الأمريكي، في حين أن العالم الرياضي الفرنسي جين بابتستي فورير (Jean Baptise Fourier) قد تنبه لمساهماتها المحتملة في عام 1923. وقد كان أول استخدام أو تطبيق للبرمجة الخطية من قبل الإقتصادي جورج ستلجر (George Stigler) وذلك في بداية الأربعينات، حيث هدف إلى تحديد مكونات الغذاء اليومي (Diet) والتي ستزود الجسم بالحد الأدنى من احتياجاته من الفيتامينات والحديد والمواد الأخرى، وبأقل تكلفة ممكنة¹.

ويمكن تعريف البرمجة الخطية بأنها أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والإمكانات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة، أي يكون توزيعها مثاليا².

إن تعبير البرمجة يعني وضع خطوات لحل مسألة أو موضوع ما لبلوغ وتحقيق هدف معين، أما تعبير خطية فيعني افتراض تغير الظاهرة التي نقوم بدراستها بصورة خطية (على شكل خط مستقيم) وكثيرا ما يستخدم هذا الافتراض لتقريب الواقع إلى صياغة رياضية سهلة.

ومما تجدر الإشارة إليه هو أن الغاية من تطبيق أسلوب البرمجة الخطية هي الوصول إلى حل نموذج البرمجة الخطية (ونموذج البرمجة الخطية هو عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات بالإضافة إلى دالة الهدف)³، ولا تنسى أن لكل مجموعة من المعادلات حلا، وعادة ما تكون للمعادلات

¹ . جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 25.

² . عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي: " المدخل لبحوث العمليات"، دار وائل للنشر، الأردن، 2001، ص 21.

³ - Gérald Baillargeon, "Programmation linéaire appliquée", les édition SMG, Québec, Canada, 1996. p 05 .

الآنية حلول أي إيجاد قيم المتغيرات، وفي حالة حل نموذج البرمجة الخطية دائماً نسعى إلى إيجاد الحل الأمثل وتكون الحلول على ثلاث أنواع¹:

- **الحل:** وهو حل ممكن الوصول إليه في أية مجموعة من المعادلات.
 - **الحل الممكن:** وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل في الحالة الأولى وهذا الحل يحقق القيود كافة بشكل عام.
 - **الحل الأمثل:** وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل الممكن، وهذا الحل يحقق القيود كافة بوجود دالة الهدف.
- وبهذا الصدد يجب التأكد من أن الحل الممكن لا يتحقق بعد وجود الحل، ولا يمكن تحقيق الحل الأمثل إلا بعد أن يتحقق الحل الممكن.

II- متطلبات وفروض نموذج البرمجة الخطية:

II-1- متطلبات استخدام البرمجة الخطية:

تتطلب مشكلة البرمجة الخطية خمس خصائص أساسية هي²:

- **تحديد الهدف:** أي ما تسعى لتحقيقه وهو إما زيادة الأرباح أو تقليل الكلفة، معبر عنه بصيغة رياضية يطلق عليها دالة الهدف وتصاغ دالة الهدف بالشكل التالي:

$$\text{حالة تعظيم: } \text{Max } (Z) = 2x + 3y$$

$$\text{حالة تدنئة: } \text{Min } (Z) = 2x + 3y$$

- **توفير عدد من البدائل:** تستخدم البرمجة الخطية عندما تكون لدينا بدائل لحل المشكلة فإذا كان هناك بديل واحد لحل المشكلة إذاً لا داعي لاستخدام البرمجة الخطية؛
- **محدودية الموارد:** نحتاج لاستخدام البرمجة الخطية عندما تكون الموارد محددة (نادرة) كالموارد البشرية، أو المواد، أو ساعات اشتغال الآلات. وهي بمثابة شروط لتحقيق الهدف، فإذا كان لدينا 300 ساعة في القسم الأول وكنا نحتاج لساعتين لإنتاج المنتج الأول وثلاثة ساعات لإنتاج المنتج الثاني فيعبر عن المشكلة كآلاتي:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 300$$

¹. حامد سعد نور الشمري، مرجع سابق، ص 10.

². محمد دباس الحميد، محمد العزاوي: " الأساليب الكمية في العلوم الإدارية"، دار اليازوري، الأردن، 2013. ص 09-10.

- وجود علاقة خطية: الخطية في البرمجة يجب أن تتوفر في دالة الهدف وفي القيود (الموارد)، بحيث أن أي تغير في كميات الإنتاج يؤدي إلى زيادة الأرباح أو تقليل التكاليف بشكل خطي (طردي) مع زيادة كمية الإنتاج، وكذلك الموارد تستنفذ بشكل خطي مع زيادة كمية الإنتاج؛
- القيود غير السالبة: إن هذا الشرط يلبي إحدى فرضيات البرمجة الخطية وهو شرط عدم السلبية. ولذلك لا يمكن أن يكون أحد القيود ينتج متغيرات سالبة كما يلي:

$$2x_1 + 3x_2 \leq -300$$

II-2- فروض نموذج البرمجة الخطية:

تمثل الافتراضات، الشروط العلمية الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية، أو هي المتطلبات الفنية لمشكلة البرمجة الخطية وهي¹:

- يفترض النموذج إمكانية النسبة و التناسب في كل مكوناته (دالة الهدف والقيود الفنية)؛
- تحقيق خاصية الجمع التي تعني أن القيمة الكلية لأي مؤشر ما هي إلا حاصل جمع قيمه الجزئية؛
- يعالج نموذج البرمجة الخطية الحالات المتصفة بالتأكد التام، وهذا يعني أن القيم التي تأخذها مؤشرات النموذج هي كلها قيم محددة ومعروفة ولا يطرأ عليها تغيير خلال فترة الدراسة. وهناك فروض أخرى منها ما يلي²:
- الخطية: يشترط أن تكون العلاقة في دالة الهدف والقيود علاقة خطية؛
- المحدودية: محدودية الموارد والأنشطة، أي أن هناك ندرة فيها وأنه لا يوجد عدد نهائي من الأنشطة البديلة والموارد المتاحة؛
- عدم السلبية: عدم إمكانية أن يكون حجم النشاط سالبا؛
- الاستقلالية: أن اختيار أي نشاط لا يستلزم بالضرورة اختيار نشاط آخر، أي استقلالية عناصر الإنتاج؛

III- مجالات استخدام البرمجة الخطية:

تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الاقتصادية التي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيرات الاقتصادية بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو هما معا.

¹ . مكيد علي: " بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية دروس ومسائل محلولة"، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015. ص 10.

² . محمد دباس الحميد، محمد العزاوي، مرجع سابق، ص ص: 08-09 .

ومن المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية هي مجالات العلوم الإقتصادية والمالية والتجارية وعلوم التسيير عامة كما يلي¹:

■ في حالة التعظيم:

- ✓ تعظيم الأرباح؛
- ✓ تعظيم الإنتاج؛
- ✓ تعظيم طاقات التخزين؛
- ✓ تعظيم إستخدام رؤوس الأموال؛
- ✓ تعظيم إستخدام اليد العاملة.

وغير ذلك من المسائل الواقعية التي يكون هدفها التعظيم.

■ في حالة التدنئة:

- ✓ تدنئة التكاليف؛
- ✓ تدنئة الخسائر؛
- ✓ تدنئة عدد الموظفين؛
- ✓ تدنئة الأجور الإجمالية.

كما تستخدم في الكثير من مجالات الإدارة وغير ذلك من المسائل الهادفة إلى عقلنة استخدام الموارد. وللبرمجة الخطية تطبيقات عديدة ظهرت وما تزال تظهر كل يوم لحل الكثير من المشكلات في عالم الأعمال منها²:

- التطبيقات التسويقية: مثل اختيار وسائل الإعلانات، وبحوث التسويق؛
- التطبيقات المالية: مثل التخطيط المالي، تحليل الأوراق والأسهم المالية، أو اختيار المحفظة الاستثمارية؛
- تطبيقات إدارة الإنتاج: مثل الإنتاج المختلط (المزيج الإنتاجي)، تخطيط الإنتاج، النقل والتخصيص، أو قرار الشراء أو الصنع.
- مشاكل المزج؛
- مشاكل تخطيط المشروعات.

وغيرها من التطبيقات التي كان للبرمجة الخطية فيها دوراً بارزاً في مساندة صانعي القرارات في منظمات الأعمال من أجل حل المشكلات التي يواجهونها في المنظمة.

¹ . راتول محمد: " بحوث العمليات "، ديوان المطبوعات الجامعية، ط2، الجزائر، 2006.

² . جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 27.

IV- صياغة أو بناء نموذج البرمجة الخطية:

إن صياغة مشكلة إدارية معينة بشكل مسألة برمجة خطية تقتضي كما أشرنا سابقاً تطوير نموذج رياضي يمثل الحالة أو المشكلة الإدارية، وبهذا فإنه يجب فهم الموقف الإداري أو المشكلة فهماً دقيقاً وهي الخطوة الأولى لحلها، إن صياغة نموذج البرمجة الخطية يمكن أن تجمل خطواته بالآتي:

- ✓ الفهم الكامل والدقيق للمشكلة الإدارية التي يواجهها المدير؛
- ✓ تشخيص دالة الهدف والقيود المحددة؛
- ✓ تحديد متغيرات القرار؛
- ✓ استخدام متغيرات القرار في كتابة العبارات الرياضية لكل من دالة الهدف والقيود.

IV-1- صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

من أجل صياغة نموذج البرمجة الخطية يجب توفر ثلاث مجموعات من العناصر الأساسية وهي:

- تحديد الهدف بصورة كمية:

ويعبر عنه بدالة الهدف وهي عبارة عند الدالة المطلوب تعظيمها أو تدنيها وهي عادة ما تكون في صورة نقدية أو طبيعية ويتوقف ذلك على طبيعة المشكلة المطلوبة تحليلها ويجب أن يكون بالإمكان التعبير عن الهدف كمياً كأن يكون الهدف تحقيق أكبر ما يمكن من الربح أو تأمين أصغر ما يمكن من الكلفة أو توفير أعظم ما يمكن من الوقت والجهد؛

- تحديد القيود:

يجب أن تكون الموارد المتاحة محددة، كما يجب أن تكون تلك الموارد قابلة للقياس ويتم التعبير عنها بصيغة رياضية على شكل مترجمات أو معادلات، أو خليط منها وتسمى بالقيود الهيكلية؛

- شرط عدم السلبية:

إذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو صفرية وغير سالبة. ويمكن وضع الصيغة العامة للبرمجة الخطية كالآتي¹:

$$Max_or_Min(z) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Subject_to

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, =, \geq) b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

إذ أن: a_{ij}, b_i, c_j ثوابت تحدد من سياق المشكلة؛

¹ . محمد عبد العال النعيمي، رفاة شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 20.

Z : تمثل دالة الهدف؛

X_j : المتغيرات المطلوب اتخاذ القرار بحققها؛

b_i : تمثل الموارد المحددة؛

a_{ij} : كمية الموارد المحددة من النوع i واللازم تخصيصها لكل وحدة واحدة من النشاط أو

الفعالية j .

C_j : تمثل الربح أو الكلفة نتيجة تخصيص المورد i لإنتاج وحدة واحدة من النشاط أو الفعالية j .

IV-2- تركيب نموذج البرمجة الخطية:

وتعد مرحلة تركيب النموذج من أهم مراحل البرمجة الخطية إذ تعد مرحلة عملية أكثر منها فنية وتعتمد على خبرة الباحث ومقدرته على صياغة المشاكل بشكل نموذج برمجة خطية، ولتوضيح هذه المرحلة سنورد المثال الآتي:

مثال رقم (01): تنتج إحدى الشركات نوعين من السلع، نوع A ونوع B، تصنع كل سلعة على ثلاث مراحل كل مرحلة في احد الأقسام الثلاثة الموجودة في الشركة، فإذا كان تصنيع السلعة A يحتاج إلى ساعتين عمل في القسم الأول وساعة عمل في القسم الثاني وأربع ساعات عمل في القسم الثالث ويحتاج تصنيع السلعة B إلى ساعتين عمل في كل قسم كما أن عدد ساعات العمل المتاحة في القسم الأول هي 160 ساعة عمل أسبوعياً وفي القسم الثاني 120 ساعة عمل أسبوعياً وفي القسم الثالث 280 ساعة عمل أسبوعياً وإذا كان ربح الوحدة الواحدة من السلعة A هو 2 دينار ومن السلعة B هو 3 دينار.

المطلوب: نموذج برمجة خطية لتحديد حجم الإنتاج الأمثل من السلعتين إذا كان هدف الشركة هو الحصول على أكبر ربح ممكن.

الحل: لتسهيل فهم المشكلة نضعها على شكل جدول (هذه الخطوة في التمارين الأولى لتعلم الحل بسهولة).

السلعة	الوقت اللازم للتصنيع			ربح الوحدة بالدينار
	القسم الأول	القسم الثاني	القسم الثالث	
A	2	1	4	2
B	2	2	2	3
ساعات العمل المتاحة	160	120	280	

تكوين النموذج:

✓ تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية، ولذلك:

نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة A هو X_1 .

نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة B هو X_2 .

✓ تحديد القيود والتعبير عنها بمعادلات أو متراجحات أو خليط منها:

والقيود هنا هي أن الوقت اللازم للتصنيع في كل قسم محدود ويجب أن نتجنب تجاوز هذا الحد، لاحظ أن الوقت اللازم للتصنيع يتوقف على الكمية المنتجة من السلعة A و السلعة B. بالنسبة للقسم الأول: الوقت اللازم للتصنيع (المتاح) = (عدد الوحدات المنتجة من السلعة A) * (الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة A) + (عدد الوحدات المنتجة من السلعة B) * (الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة B)، ويجب أن لا يتجاوز عدد الساعات العمل المتاحة في القسم الأول وكما في المتراجحة الآتية:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 160$$

وبنفس الطريقة بالنسبة للقسمين الثاني والثالث أيضا وكما في المتراجحات الآتية:

بالنسبة للقسم الثاني:

$$x_1 + 2x_2 \leq 120$$

بالنسبة للقسم الثالث:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 280$$

ولأن عدد الوحدات المنتجة لا يمكن أن يكون سالبا، وعلى النحو الآتي:

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

✓ تحديد دالة الهدف:

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

وتهدف إلى إنتاج الكميات المثلى من x_1, x_2 التي تجعل دالة الهدف Z اكبر ما يمكن Maximize

ودائما تختصر بـ Max

البرنامج الخطي:

$$Max(z) = 2x_1 + 3x_2$$

s/c

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 160 \\ x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 280 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

مثال رقم (02): تنتج إحدى الشركات ثلاث أنواع من عصير الفواكه في مصنعين A و B وإن كميات الإنتاج في اليوم تقدر كآلاتي:

نوع العصير	المنتج A (لتر)	المنتج B (لتر)
1	1500	1500
2	3000	1000
3	2000	5000

وقد أظهرت دراسة للسوق أن من المتوقع أن يكون هناك طلب في شهر جويلية يقدر بـ 20000 لتر من النوع الأول و 40000 من النوع الثاني و 44000 من النوع الثالث، وكذلك فإن كلفة تشغيل المصنع A هي 600 وحدة نقدية في اليوم و 400 وحدة نقدية للمصنع B. المطلوب: تحديد عدد الأيام التي يشتغلها كلا من المصنعين للوفاء بطلب السوق المتوقع في شهر جويلية مع تدنية التكاليف إلى أدنى حد ممكن (صياغة المسألة)، وكتابة البرنامج الخطي بالشكل المصفوفي.

الحل:

القرار هو تحديد عدد الأيام التي يشتغلها كل من المصنعين في شهر جويلية.

نفترض أن عدد الأيام التي يشتغلها المصنع $X_1=A$

نفترض أن عدد الأيام التي يشتغلها المصنع $X_2=B$

ومنه البرنامج الخطي هو :

$$Min(z) = 600x_1 + 400x_2$$

s/c

$$\begin{cases} 1500x_1 + 1500x_2 \leq 20000 \\ 3000x_1 + 1000x_2 \leq 40000 \\ 2000x_1 + 5000x_2 \leq 44000 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

أما الشكل المصفوفي يكتب كما يلي:

$$\text{Min}(z) = (600 \quad 400) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

s/c

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1500 & 1500 \\ 3000 & 1000 \\ 2000 & 5000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 20000 \\ 40000 \\ 44000 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

IV-3- تمارين محلولة:

التمرين الأول: تتعهد إحدى الشركات بتقديم 100 كغم من مادة غذائية تتكون من مزيج ثلاث مواد: A، B، C بشرط أن يحتوي هذا المزيج على:

✓ 0,08% على الأقل وليس أكثر من 1,2% من الكالسيوم.

✓ 22% بروتين على الأقل.

✓ 50% ألياف في أكثر الحدود.

فإذا كانت محتويات المواد الثلاثة من العناصر الغذائية وكلفة كل منها كالآتي:

الكلفة/كغم	الكمية الموجودة في كل كغم			المواد
	ألياف	بروتين	كالسيوم	
0,0164	-	-	0,380	A
0,0463	0,02	0,09	0,001	B
0,1250	0,08	0,50	0,002	C

المطلوب: صياغة الحالة في شكل برمجة خطية بحيث يتم تلبية المتطلبات الغذائية وتدنية الكلفة إلى أدنى حد ممكن.

حل التمرين الأول: القرار هنا هو تحديد المزيج الأمثل من المواد الثلاث.

نفترض أن كمية A = X_1 ، وكمية B = X_2 ، وكمية C = X_3 .

ومنه البرنامج الخطي للمسألة كالتالي:

$$Min(z) = 0,0164x_1 + 0,0463x_2 + 0,1250x_3$$

s/ c

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ 0,380x_1 + 0,001x_2 + 0,002x_3 \leq 0,012 \\ 0,380x_1 + 0,001x_2 + 0,002x_3 \geq 0,008 \\ 0,09x_2 + 0,50x_3 \geq 0,22 \\ 0,02x_2 + 0,08x_3 \leq 0,50 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$$

التمرين الثاني: ترغب إحدى شركات الطباعة في شراء نوعين من المطابع هما A و نوع B ، والنوع A يشغل مساحة مقدارها 40 متر مربع وتبلغ كلفة الوحدة الواحدة 2000 دينار وتحتاج إلى ثلاثة عمال يعملون لمدة 8 ساعات، أما النوع B فيشغل مساحة مقدارها 60 متر مربع وتبلغ كلفة الوحدة 6000 دينار وتحتاج إلى 4 عمال يعملون لمدة 8 ساعات . فإذا كانت المساحة المتاحة لدى الشركة هي 720 متر مربع والميزانية المخصصة لشراء المطابع هي 60000 دينار، علما بأن لدى الشركة 48 عاملا، ويمكن للمطبعة A أن تعمل بمعدل 100 ورقة في الدقيقة والمطبعة B يمكنها أن تعمل بمعدل 300 ورقة في الدقيقة.

المطلوب : كون نموذج برمجة خطية لتحديد العدد اللازم شراؤه من النوعين من المطابع A و B لكي تتمكن الشركة من تحقيق أكبر إنتاج.

حل التمرين الثاني:

$$X_1 = \text{عدد المطابع المفترض شراؤها من قبل الشركة ومن النوع A.}$$

$$X_2 = \text{عدد المطابع المفترض شراؤها من قبل الشركة ومن النوع B.}$$

ومنه البرنامج الخطي يكون كالآتي:

$$Max(z) = 48000x_1 + 144000x_2$$

s/ c

$$\begin{cases} 40x_1 + 60x_2 \leq 720 \\ 2000x_1 + 6000x_2 \leq 60000 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 48 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

التمرين الثالث: يتم فحص المنتجات الصناعية في إحدى المنشأة من قبل نوعين من المفتشين A و B (التصنيف على أساس الكفاءة في الفحص)، يتوقع أن يتم فحص ما لا يقل عن 1500 وحدة من المنتج يومياً (8 ساعات عمل/يوم). فإذا علمت بأن المفتش A يستطيع فحص 20 قطعة في الساعة وبدقة 96% في حين أن المفتش B يستطيع فحص 14 قطعة وبدقة 92%، إن الأجور المدفوعة لكلا النوعين من المفتشين هي 5 وحدات نقدية في الساعة للمفتش A و 4 للمفتش B كذلك فإن عدد المفتشين الموجودين في المؤسسة هو 10 من النوع A و 15 من النوع B. المطلوب: تخصيص العدد الأمثل من المفتشين لإنجاز هدف المهمة وذلك بصياغة المسألة في شكل برمجة خطية.

حل التمرين الثالث: إن القرار هنا هو تحديد العدد الأمثل من المفتشين من كلا النوعين A و B .

نفترض أن عدد المفتشين المطلوب من النوع $X_1=A$

نفترض أن عدد المفتشين المطلوب من النوع $X_2=B$

إن الهدف سيكون تقليل الكلفة الكلية للمفتشين، علماً بأن الكلفة المرتبطة بكل نوع منهم ستكون

كالآتي:

كلفة الساعة الواحدة للمفتش من النوع A هي : $5 + (3 * 0,04 * 20) = 7,40$ وحدة نقدية .

كلفة الساعة الواحدة للمفتش من النوع B هي : $4 + (3 * 0,08 * 14) = 7,36$ وحدة نقدية.

دالة الهدف : $59,20X_1 + 58,88X_2 = 8(7,40X_1 + 7,36X_2)$

القيود الثالث: $20 * 8X_1 + 14 * 8X_2 \geq 1500$

ومنه البرنامج الخطي يكون كالتالي:

$$Min(z) = 59,20x_1 + 58,88x_2$$

s/ c

$$\begin{cases} x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 15 \\ 160x_1 + 112x_2 \geq 1500 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

IV-4- تمارين مقترحة:

التمرين الأول: مؤسسة إقتصادية بها 3 ورشات لإنتاج 3 أنواع من المنتجات هي: خزائن حديدية، مكاتب إدارية، كراسي. بحيث أن كل منتج يمر عبر الثلاث ورشات على النحو التالي: الورشة رقم 01: تجري بها عملية صناعة الهياكل، طاقة العمل القصوى بها هي: 32 ساعة عمل يومياً، (أي 4 عمال كل عامل يشتغل 8 ساعات يومياً).

الورشة رقم 02: تجري بها عملية تركيب الملحقات، طاقة العمل القصوى بها هي: 24 ساعة عمل يوميا.
الورشة رقم 03: تجري بها عملية الإنهاء (طلاء ، تزيين ، تغليف)، طاقة العمل القصوى بها هي: 16 ساعة عمل يوميا.

هذه المؤسسة تسعى لتحقيق أكبر ربح ممكن، ولأجل ذلك بينت لها الدراسة التقنية التي قامت بها أن الوحدة الواحدة من المنتج الأول تتطلب 4 ساعات عمل في (الورشة رقم 01) و 2 ساعة عمل في (الورشة 02) و 2 ساعة عمل في (الورشة 03)، بينما الوحدة الواحدة من المنتج 2 تتطلب 4 ساعات عمل في (الورشة 01) و 4 ساعات عمل في (الورشة 02) و 2 ساعة عمل في (الورشة 03)، وأخيرا الوحدة الواحدة من المنتج 3 تتطلب 5 ساعات عمل في (الورشة 01) و 3 ساعات عمل (الورشة 02) و 1 ساعة عمل في (الورشة 03). كما أن الربح الصافي للوحدة الواحدة من كل منتج هو: المنتج الأول: 200 دج، المنتج الثاني: 150 دج، المنتج الثالث: 120 دج.

المطلوب: أوجد الصيغة الرياضية لهذه المسألة والتي من شأنها إيجاد الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج لأجل تعظيم ربح هذه المؤسسة مع شكل المصفوفي.

التمرين الثاني: يمكن لشركة استخدام ثلاث عمليات إنتاجية (أ)، (ب)، (ج) في مصنعها لإنتاج أحد المنتجات، للحصول على كل وحدة من المنتج تحتاج العملية (أ) إلى 2 ساعة عمالة و 1 ساعة آلات، بينما تحتاج العملية (ب) إلى 1,5 ساعة عمالة و 1,5 ساعة آلات، أما العملية (ج) فتحتاج إلى 1,1 ساعة عمالة و 2,2 ساعة آلات. ويجب على الشركة دفع 300 وحدة نقدية لكل ساعة عمالة و 200 ون لكل ساعة آلات لكنها لا تستطيع استخدام أكثر من 1200 ساعة آلات شهريا حيث أن ذلك هو أكبر قدر متاح في مدى القصير. إذا رغبت الشركة في إنتاج 1000 وحدة شهريا. فما هو البرنامج الخطي الذي يسمح بتحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها باستخدام العملية (أ)، (ب)، (ج)؟

التمرين الثالث: تصنع مؤسسة نوعين من المعاطف، معاطف للرجال معاطف للنساء، سعر بيع كل معطف رجالي 7500 دج و 8200 دج لكل معطف نسائي. وحسب متطلبات السوق لا يجب أن يتعدى إنتاج النوعين 6000 وحدة و 3000 وحدة على التوالي أسبوعيا. يتوافر لدى المؤسسة 50 عامل ويشغل كل عامل 10 ساعات يوميا و 5 أيام أسبوعيا. مدة صنع معطف النساء ضعف مدة صنع معطف الرجال وإذا أرادت المؤسسة صنع المعاطف الرجالية فقط فيمكن أن تصنع 1600 معطف في اليوم.

المطلوب: ما هو البرنامج الخطي الذي يسمح بمعرفة عدد المعاطف الواجبة الصنع في الأسبوع من كل نوع.

التمرين الرابع: السيد: " س " يعمل كمسير في مستشفى و يجب عليه توفير المكونات الغذائية الأساسية لغذاء مرضى قسم الجراحة العامة، الطبيب المكلف بالقسم أعطى له التوصيات التالية للمكونات التي يجب أن تحتوي عليها وجبة المريض وهي:

- على الأقل 50 وحدة من البروتين .
- على الأقل 15 وحدة من الفيتامينات .

- على الأقل 1200 حريرة .
- على الأكثر 100 وحدة من الدسم .

السيد: " س " لجأ إلى المختصين في التغذية للمستشفى، والذين أعطوا له الكميات التي جرت العادة شراءها من الأغذية وهي في الجدول التالي:

وسعر الأغذية في السوق كان ما يلي: حوت 45 دج للكلغ، دجاج 18 دج للكلغ، جبن 35 دج للكلغ، جزر 6 دج للكلغ ، بطاطا 5 دج للكلغ ، عجائن 8 دج للكلغ .

المحتويات / الغذاء	حوت (100غ)	دجاج (100غ)	جبن (100غ)	جزر (كلغ)	عجائن (كلغ)	بطاطا (كلغ)
البروتين	40	50	30	20	22	15
الفيتامين	25	10	20	30	15	25
الدسم	10	20	30	50	100	80
الحريرات	300	500	600	1400	2000	1800

المطلوب: إعداد البرنامج الذي يسمح بتحديد مكونات الوجبة بأقل سعر مع الحفاظ على صحة المريض.