V- حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة الحل البياني:

يمكن حل النموذج الرياضي بطريقة الرسم البياني عندما يكون النموذج الرياضي متكون من متغيرتين فقط ويسمى أحياناً بالطريقة الهندسية، أما استخدام هذه الطريقة في الحياة العملية معدومة لأن عدد المتغيرات التي تؤثر في اتخاذ القرارات كثيرة جداً، ولكن استخدام هذه الطريقة تعتبر مدخلاً لفهم واستيعاب طريقة الحل، حيث تعطي تصوراً عن صورة احتمالات الحل الأمثل للنموذج الرياضي، وكما ذكرنا فإن هذه الطريقة تستخدم فقط في حالة احتواء النموذج الرياضي على متغيرتين فقط لأن مجال الرسم يعتمد أساساً على الإحداثيات المتعامدة (X_1,X_2)[1].

وتعتبر هذه الطريقة من الطرق البسيطة والتي تعطي نتائج دقيقة إلا أنها طريقة غير كفوءة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية.

V-1- خطوات إيجاد الحل الأمثل:

وتتكون عملية الحل بطريقة الحل البياني من عدد من الخطوات التي لابد من مراعاة تسلسلها للوصول إلى الحل النهائي:

- ✓ تحويل كل متراجحات القيود إلى معادلات، وعملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة معادلة خطية يمكن تمثيلها بخط مستقيم؛
- ✓ تحديد نقاط تقاطع كل قيد مع المحورين والتوصيل بين هاتين النقطتين بخط مستقيم لكل قيد، وتسمى المنطقة التي تشترك فيها جميع القيود المتعلقة بالمشكلة بمنطقة الحلول الممكنة؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود من نوع أصغر أو يساوي، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التعظيم، نشطب المناطق التي لاتحقق القيود وهي توجد إلى يمين المستقيم، فإن منطقة الحل الممكنة يجب أن تكون محدودة من اليمن وباتجاه نقطة الأصل وبالتالي فهي تأخذ شكل المضلع، والحل الأمثل يقع على أحد رؤوس المضلع الأبعد عن نقطة الأصل؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود من نوع أكبر أو يساوي، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التدنئة، نشطب المناطق التي لا تحقق القيود وهي توجد إلى يسار المستقيم، فإن منطقة الحل الممكنة تكون خارج المضلع بدلاً من أن تقع داخله أي أن منطقة الحل الأمثل تكون غير محددة من اليمين ونقطة الحل الأمثل هي الأقرب عن نقطة الأصل؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود في المشكلة خليط من ($\geq$ ، $\leq$) معاً، فإنها تكون مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية بنوعيها التعظيم والتدنئة، ولهذه الحالة منطقة حل ممكنة على شكل مضلع؛

---

[1]. سهيلة عبد الله سعيد: " **الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات**"، دار الحامد، ط1، الأردن، 2007. ص 38.

- ✓ إيجاد إحداثيات كل نقطة من النقاط المضلع بمنطقة الحل الكلية، أي نجد قيم X_1 و X_2 عند كل نقطة؛
- ✓ نجد قيمة (Z) التي تمثل قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من النقاط المضلع عن طريق تعويض إحداثيات النقطة رؤوس المضلع في دالة الهدف؛
- ✓ نحدد نقطة الحل الأمثل، وهي النقطة التي قيمة (z) عندها أكبر ما يمكن في حال كانت دالة الهدف التعظيم (Maximization)، أو النقطة التي قيم (z) عندها أقل ما يمكن في حالة كانت دالة الهدف تخفيض (Minimization).
- ✓ ويمكن إيجاد الحل الأمثل بطريقة مباشرة عندما يكون منطقة الحل عبارة عن مضلع متعدد الرؤوس، وذلك بجعل دالة الهدف معدومة معدومة، أي نساويها إلى الصفر، ونرسم مستقيمها على نفس المعلم، يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ، نسمي هذا المستقيم (Δ)، نحرك المستقيم (Δ) بصفة متوازية اتجاه رؤوس المضلع المحصل عليه من المستقيمات، وتكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة للدالة الإقتصادية (دالة الهدف) هي آخر نقطة يصل إليها المستقيم (Δ) عند سحبه إلى الأعلى بشكل موازي لأصله، وهي نقطة حاصلة من التقاطع عدة مستقيمات مولدة وعكس في حالة التدنئة[1].

وفيما يلي توضيح لتطبيق هذه الخطوات على نموذج البرمجة الخطية:

مثال رقم (01): أوجد قيم X_1 و X_2 المثلى التي تجعل دالة الهدف اكبر ما يمكن للبرنامج التالي بإستخدام الطريقة البيانية:

$$Max(z) = 4x_1 + 3x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 21 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

الحل: لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

- ✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معدلات كما يلي:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \end{cases}$$

- ✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

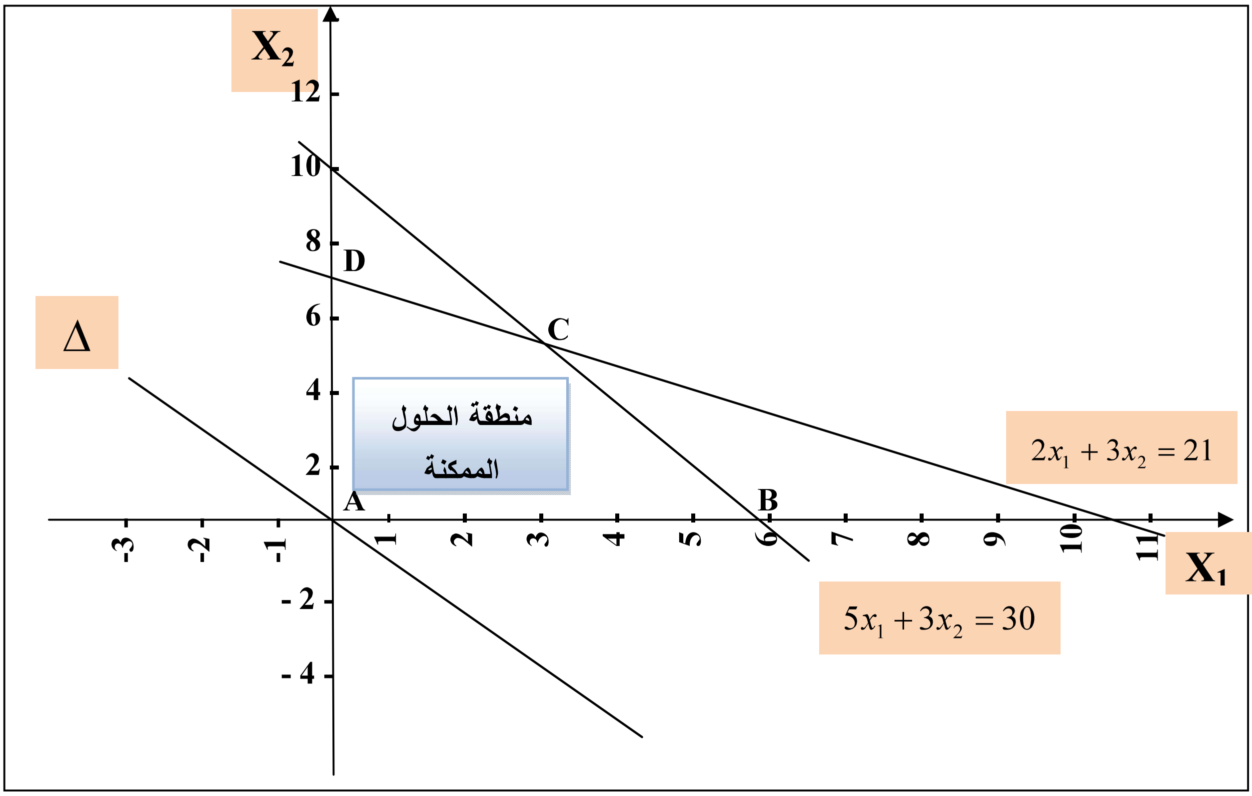
[1] . محمد راتول، مرجع سابق، ص 26.

$2x_1+3x_2=21$	
x_1	x_2
0	7
10,5	0

$5x_1+3x_2=30$	
x_1	x_2
0	10
6	0

على نفس المعلم نرسم المستقيم (Δ) وهو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الإقتصادية في أدنى قيمة لها وهي: Z=0 أي: المستقيم (Δ) يمر من النقطتين:

$4x_1+3x_2=0$	
x_1	x_2
3	−4
−2,25	3



بعد هذا تحدد منطقة الحلول الممكنة وحسب ما هو مطلوب من القيود وهي المنطقة التي تحقق جميع القيود في وقت واحد، وهي كما مبين في الشكل المقابل (A,B,C,D).

أي نقطة توجد إلى يمين المستقيمين لا تحقق القيود، كما أن قيد عدم السلبية يجعل كل المناطق التي هي أدنى من المحور الأفقي وكل المناطق التي هي على يسار المحور العمودي مرفوضة وبالتالي فإنه لا توجد سوى منطقة واحدة هي التي تحقق جميع القيود آنيا وتشمل جميع النقاط الموجودة داخل

المنطقة (A,B,C,D) أي المنطقة غير المشطبة وتسمى هذه المنطقة بمنطقة الحلول الممكنة أو منطقة الحلول المقبولة.

عند تحريك المستقيم (Δ) إلى الأعلى نجد أن آخر نقطة يصلها في منطقة الحلول المقبولة هي النقط (C) وبالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة وهي نقطة تقاطع المستقيمين (1) و(2)، إذ نجد قيمة المتغيرتين وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة قيمة المتغيرتين وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة X_1 وإمداد مستقيم موازي للمحور الأفقي من النقطة (Δ) فنجد قيمة X_2 عند نقطة تقاطعه مع المحور العمودي، وإما أن نجد قيمة المتغيرين بحل معادلتي المستقيمين حلا مشتركا كما يلي:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \ldots\ldots\ldots(1) \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نجد:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \end{cases}$$

$$3x_1 = 9 \Rightarrow x_1 = 3$$

بالتعويض في إحدى المعادلات نجد: $x_2 = 5$

وبالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذين يحققان أعلى قيمة للدالة الإقتصادية هما: $C:(x_1 = 3, x_2 = 5)$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول: قيد محقق تماما $5\times 3 + 3\times 5 = 30$

القيد الثاني: قيد محقق تماما $2\times 3 + 3\times 5 = 21$

ومنه لا توجد طاقة غير مستعملة ، ولمعرفة القيمة العظمى للدالة الاقتصادية يكفي أن نعوض القيمتين المحصل عليهما في هذه الدالة فنحصل على ما يلي:

$$Z_C = 4x_1 + 3x_2 = 4\times 3 + 3\times 5 = 27$$

وهي أعلى قيمة للدالة الاقتصادية، ولا يمكن أن توجد أية قيم أخرى للمتغيرتين تعطيان أعلى من هذه القيمة وتحقق في نفس الوقت جميع القيود، والجدول يوضح ذلك:

نقاط	أحداثي نقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A:(x_1 = 0, x_2 = 0)$	$Z_A = 0$
B	$B:(x_1 = 6, x_2 = 0)$	$Z_B = 24$
C	$C:(x_1 = 3, x_2 = 5)$	$Z_C = 27$
D	$D:(x_1 = 0, x_2 = 7)$	$Z_D = 21$

ملاحظة: إذا وجد حل أمثل لبرنامج خطي ذي متغيرتين، فإن هذا الحل يوجد عند أحد رؤوس مضلع منطقة الحل الممكن.

مثال رقم (02): أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Min(z) = 0{,}75x_1 + 0{,}85x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \geq 100 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 70 \\ 2x_1 + 8x_2 \geq 90 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معدلات كما يلي:

$$8x_1 + 4x_2 = 100$$

$$2x_1 + 4x_2 = 70$$

$$2x_1 + 8x_2 = 90$$

✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

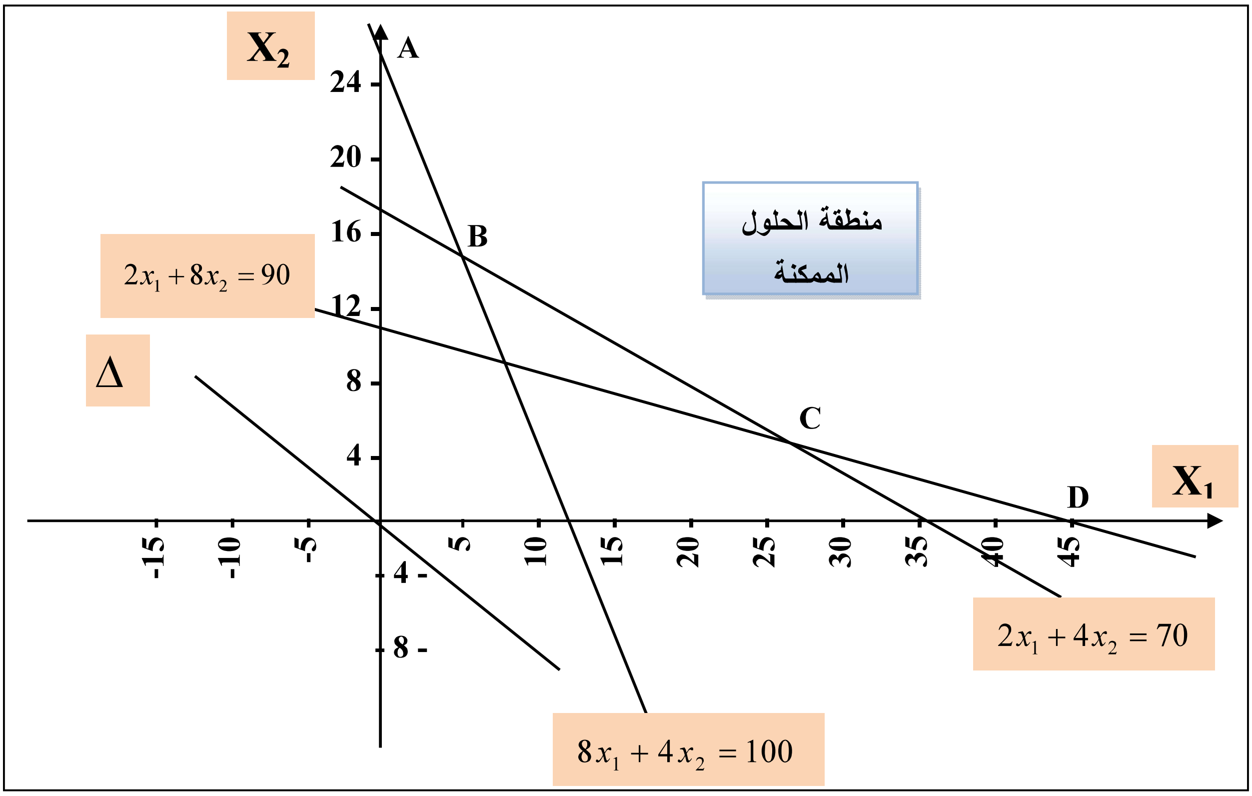
$2x_1 + 8x_2 = 90$	
x_1	x_2
0	11,25
45	0

$2x_1 + 4x_2 = 70$	
x_1	x_2
0	17,5
35	0

$8x_1 + 4x_2 = 100$	
x_1	x_2
0	25
12,5	0

على نفس المعلم نرسم المستقيم (Δ) وهو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الإقتصادية في أدنى قيمة لها وهي: Z=0 أي: المستقيم (Δ) يمر من النقطتين:

$0{,}75x_1 + 0{,}85x_2 = 0$	
x_1	x_2
3	$-2{,}64$
$-3{,}4$	3



نلاحظ أن منطقة الحل الممكن قد تحددت بالمنطقة البعيدة عن نقطة الأصل وذلك لأن المتراجحات في هذه المشكلة من النوع أكبر أو يساوي وبالتالي فإن الحل الأمثل يقع على الحدود الداخلية لهذه المنطقة والتي يمكن تحديدها بالنقاط (ABCD).

حيث إحداثيات النقطة A هي: (0 ;25) والنقطة D هي: (45;0)

أما النقاط B و C فلا يمكن تحديد إحداثياتهم مباشرة من الرسم الأمر الذي يتطلب استخراجهم من خلال حل المعادلات كما يلي:

النقطة C متولد من تقاطع مستقيم القيد الثاني والثالث:

$$2x_1+4x_2=70$$
$$2x_1+8x_2=90$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن: $C:(x_1=25, x_2=5)$

النقطة B متولدة من تقاطع مستقيم القيد الأول والثاني:

$$8x_1 + 4x_2 = 100$$
$$2x_1 + 4x_2 = 70$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن: $B:(x_1 = 5, x_2 = 15)$

وبتعويض قيم إحداثيات الزوايا الأربعة (A,B,C,D) في دالة الهدف، نتوصل إلى الحل الأمثل والذي سيتحقق عند النقطة (B) لأنها أقل تكاليف كما يظهر في الجدول التالي:

قيمة دالة الهدف	أحداثي نقاط	نقاط
$Z_A = 21{,}25$	$A:(x_1 = 0, x_2 = 25)$	A
$Z_B = 16{,}50$	$B:(x_1 = 5, x_2 = 15)$	B
$Z_C = 23$	$C:(x_1 = 25, x_2 = 5)$	**C**
$Z_D = 33{,}75$	$D:(x_1 = 45, x_2 = 0)$	D

ولتأكيد النتيجة عند تحريك المستقيم (Δ) إلى الأعلى نجد أن النقطة الأولى التي يصلها في منطقة الحلول المقبولة هي النقط (B) وبالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة.

وبالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذين يحققان أعلى قيمة للدالة الإقتصادية هما: $B:(x_1 = 5, x_2 = 15)$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول: قيد محقق تماما $8 \times 5 + 4 \times 15 = 100$

القيد الثاني: قيد محقق تماما $2 \times 5 + 4 \times 15 = 70$

القيد الأول: قيد محقق $2 \times 5 + 8 \times 15 = 130 \succ 90$

القيمة العظمى للدالة الاقتصادية يكفي أن نعوض القيمتين المحصل عليهما في هذه الدالة فنحصل على مايلي:

$$Z_B = 0{,}75x_1 + 0{,}85x_2 = 0{,}75 \times 5 + 0{,}85 \times 15 = 16{,}50$$

V-2- حالات خاصة في الحل البياني:

أن مشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة يمكن تطبيقها في مجالات واسعة وبنجاح، إلا أن هناك حالات خاصة يجب مراعاتها، ومن هذه الحالات هي:

- **تعدد الحلول المثلى:**

ونحصل على هذا النوع من الحلول عندما تكون هناك أكثر من نقطة واحدة في منطقة الحلول الممكنة تعطي القيمة نفسها لدالة الهدف التي تكون أعلى القيم في حالة كون دالة الهدف من نوع التعظيم أو تكون أقل القيم حين تكون دالة الهدف من نوع تدنئة.