مثال رقم (03): أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Max(z) = x_1 + 2x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

- ✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معدلات كما يلي:

$$x_1 + 2x_2 = 10$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_2 = 4$$

- ✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

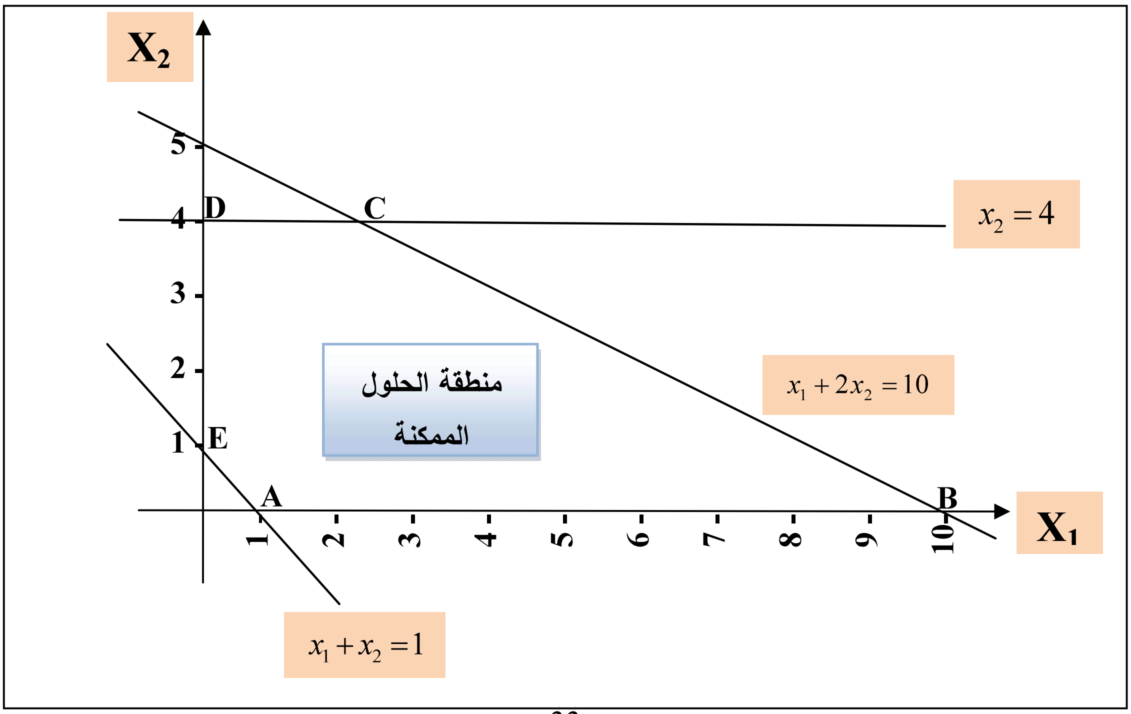
$x_2 = 4$ هو خط مستقيم موازي للمحور الأفقي.

$x_1 + x_2 = 1$

x_1	x_2
0	1
1	0

$x_1 + 2x_2 = 10$

x_1	x_2
0	5
10	0



نلاحظ أن منطقة الحل الممكن قد تحددت بالنقاط (ABCDE)، حيث إحداثيات النقطة A هي: $(0;1)$ والنقطة B هي: $(0;10)$ أما النقطة D هي: $(4;0)$ و E هي: $(1;0)$.

أما النقطة C متولد من تقاطع مستقيم القيد الأول والثاني:

$$x_1 + 2x_2 = 10$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن:

$$C:(x_1 = 2, x_2 = 4)$$

وبتعويض قيم إحداثيات الزوايا الخمس في دالة الهدف، نتوصل إلى الحل الأمثل والذي يحقق لنا أكبر عائد كما يظهر في الجدول التالي:

نقاط	أحداثي نقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A:(x_1 = 1, x_2 = 0)$	$Z_A = 1$
B	$B:(x_1 = 10, x_2 = 0)$	$Z_B = 10$
C	$C:(x_1 = 2, x_2 = 4)$	$Z_C = 10$
D	$D:(x_1 = 0, x_2 = 4)$	$Z_D = 8$
E	$E:(x_1 = 0, x_2 = 1)$	$Z_E = 2$

من الجدول نجد أن النقطتين C و B تحقق لدالة الهدف قيمة عظمى مساوية إلى 10، يتضح من ذلك أن للمشكلة أكثر من حل واحد ويعود السبب في ذلك هو أن دالة الهدف تكون موازية لأحد القيود الهيكلية، أي عند رسم دالة الهدف وتحريك الرسم ينطبق الرسم في إحدى أوضاعه على أحد المستقيمات المرسومة وهنا يقال أن للمشكلة مجموعة من الحلول المثلى (تعدد الحلول المثلى).

- **عدم وجود حلول:**

هنا يحصل هذا النوع من الحلول عندما لا يمكن تعيين منطقة الحلول الممكنة ولا يوجد هنا حل أساسي ابتدائي مقبول، أي قيود لا تتقاطع في منطقة حل واحدة ، بحيث تكون منطقة تقاطع القيود عبارة عن مجموعة خالية[1] وكما يلي:

[1] - Gérald Baillargeon ,op-cit , P 55 .

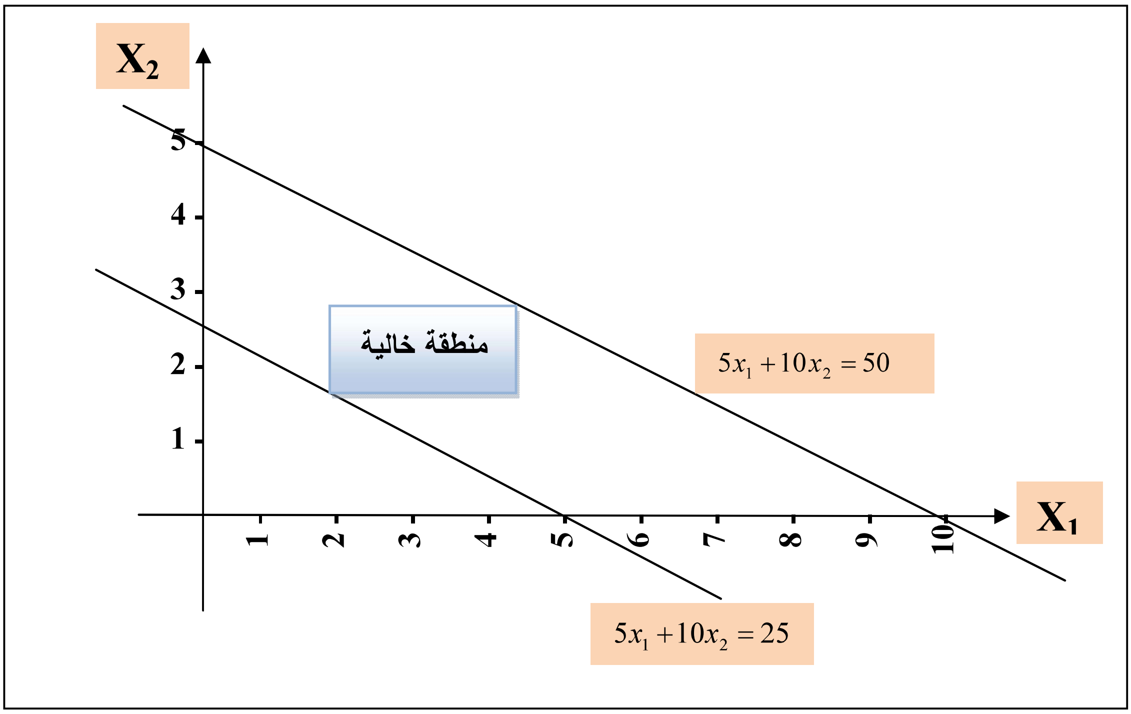
مثال رقم (04): أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Min(z) = 20x_1 + 15x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 25 \\ 5x_1 + 10x_2 \geq 50 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

$5x_1 + 10x_2 = 50$	
x_1	x_2
0	5
10	0

$5x_1 + 10x_2 = 25$	
x_1	x_2
0	2,5
5	0



من خلال الشكل نلاحظ أن القيدين متعاكسان ولا يتقاطعان نهائياً، وبذلك لا نستطيع الحصول على حل مقبول لهذه المشكلة.

- **منطقة الحل الممكن غير محدودة:**

ويعني ذلك عدم إمكانية تحديد نقطة حل أمثل وهذا يعني زيادة متغير أو أكثر من متغيرات المشكلة ومن ثم الربح دون مخالفة لأي قيد من القيود المشكلة وتعتبر هذه الحالة نظرية وبعيدة عن الواقع وبالنسبة لطريقة الرسم البياني فإن هذا يعني بأن منطقة الحل مفتوحة وبدون نهاية علماً بأن هذه الحالة تنطبق فقط على نموذج البرمجة الخطية الذي دالة الهدف له تعظيم[1].

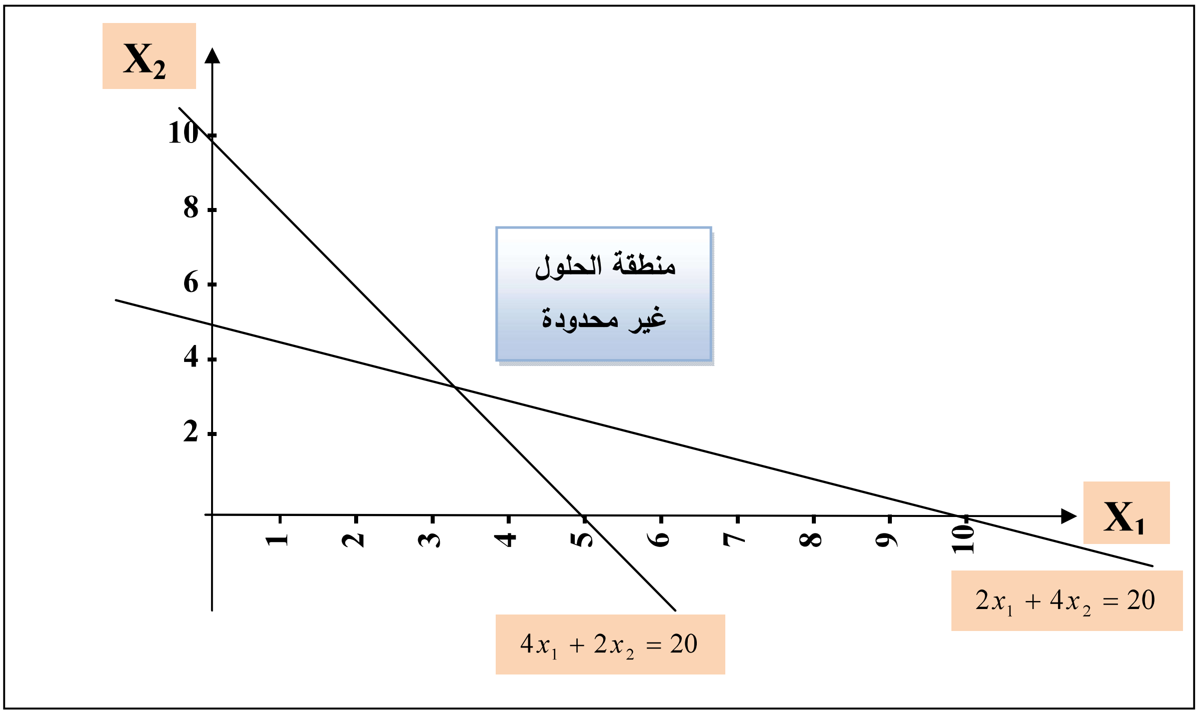
ويمكن اعتبار هذه الحالة تقع أيضا عندما تكون المشكلة بدالة هدف تعظيم ويكون هناك تناقض بين دالة الهدف والقيود فتكون هذه الأخيرة أكبر أو تساوي وتعكس الشكل القانوني(القيود أقل أو تساوي).

مثال رقم (05): افترض أن لدينا مشكلة البرمجة الخطية التالية:

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Max(z)=3x_1+5x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases}2x_1+4x_2\geq 20\\4x_1+2x_2\geq 20\end{cases}$$
$$x_1\geq 0; x_2\geq 0$$

ويوضح الشكل أدناه الرسم البياني لهذه المشكلة:



إن منطقة الحل الممكن مفتوحة من النهاية وهي غير محدودة، فأية قيمة في المنطقة تحقق دالة الهدف وبالتالي نقول أن دالة الهدف لانهائية.

[1] . جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 52.

- **حالة حياد أحد القيود:**

وهي من المشاكل الشائعة في مشاكل البرمجة الخطية الكبيرة التي تحتوي على عدد كبير من القيود، مما ينتج عنها قيد فائض لا حاجة له وليس له أي تأثير على الحل، وهذا يعني وجود قيود لها أهمية أكثر من غيرها، لذلك فإن استخدام الأهم يغني عن استخدام الأقل أهمية.

مثال رقم (06): افترض أن لديك نموذج البرمجة الخطية التالية:

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

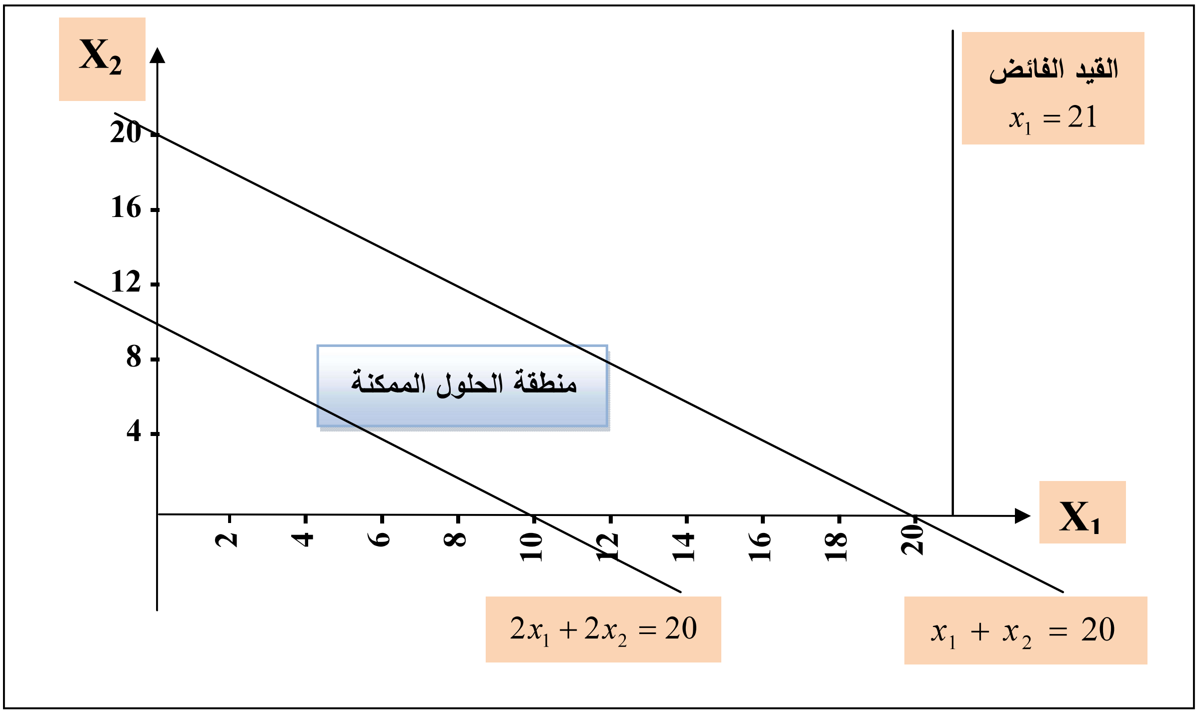
$$Max(z) = 5x_1 + 5x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 20 \\ x_1 \le 21 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$$

ويوضح الشكل أدناه الرسم البياني لهذه المشكلة:



نلاحظ من خلال الشكل وجود حالة القيد الفائض متمثلة بالقيد الثالث أبطلا مفعول هذا القيد ذلك أنهما أكثر تقييداً وتحديداً وهما اللذان حددا منطقة الحل الممكن.

V-3 – تمارين مقترحة: باستخدام الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل لبرامج الخطية التالية

$1.Max(z)=15x_1+12x_2$ s/c $\begin{cases}3x_1+6x_2\le 54\\6x_1+3x_2\le 48\\9x_1+9x_2\le 90\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	$2.Min(z)=80x_1+60x_2$ s/c $\begin{cases}18x_1+12x_2\ge 180\\6x_1+9x_2\le 162\\5x_1+10x_2\ge 110\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$
$3.Max(z)=2x_1+4x_2$ s/c $\begin{cases}x_1\ge 7\\x_2\le 11\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	$4.Max(z)=3x_1+6x_2$ s/c $\begin{cases}x_1+x_2\ge 12\\3x_1+4x_2\le 24\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$
$5.Max(z)=9x_1+2x_2$ s/c $\begin{cases}x_1+x_2\le 10\\2x_1+x_2\le 12\\x_1\le 14\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	$6.Max(z)=x_1+2x_2$ s/c $\begin{cases}1{,}5x_1+3x_2\le 15\\x_1\le 7\\x_2\le 3\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$