

الفصل الثالث

البرمجة الخطية وطريقة
السمبليكس (Simplex)

تعرفنا في الفصل السابق إلى كيفية الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية ذات المتغيرين باستخدام طريقة الحل البياني، إلا أن واقع حال المشاكل التي تواجهها المؤسسات تتصف بالتعقيد والتشابك مما يجعلها بحاجة إلى عدد كبير من القيود والمتغيرات التي يجب أن تؤخذ بعين الاعتبار عند عملية صنع القرار. لذلك لا بد من استخدام طريقة أخرى أشمل وأسهل من طريقة الحل البياني.

طريقة السمبليكس وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحلول المثلى لمشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة، وتستخدم هذه الطريقة لحل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية جبرياً مهماً كان عدد المتغيرات وهي الأكثر استخداماً لحل النماذج الرياضية¹.
تعمل هذه الطريقة بشكل مشابه تماماً للطريقة البيانية في كيفية الوصول للحل الأمثل، حيث تقوم هذه الطريقة بفحص ذروات منطقة الإمكانيات بشكل متسلسل وباستخدام مفاهيم رياضية بسيطة، ويتم بشكل متكرر، وهذا يعني إعادة نفس الإجراءات مرة تلو الأخرى ولحين الوصول للحل الأمثل.

I- آلية عمل طريقة السمبليكس:

في حالة وجود أكثر من ثلاث متغيرات في مشكلة فإنه لا يمكن استخدام الطريقة البيانية وإنما علينا استخدام طريقة أخرى المسماة بالسمبليكس التي ابتكرها دانزك (Geroge Dantzig) عام 1947 وهي عبارة عن أسلوب اختياري تكراري لتحليل مشاكل البرمجة الخطية ويعتمد هذا الأسلوب على اختيار المتغيرات ذات التأثير الأساسي على كل من دالة الهدف والقيود ويهمل المتغيرات الأخرى التي لا تؤثر على دالة الهدف والقيود².

I-1- تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة الأولية إلى الصيغة النموذجية (القياسية):

قبل الحل بطريقة النموذج بطريقة السمبليكس، وتحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة الأولية إلى الصيغة النموذجية، علينا أولاً معرفة أنواع الصيغ التي يمكن كتابة البرنامج الخطي على أساسها.

¹. سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، ص 53.

². محمد عبد العال النعيمي، رفاة شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 45.

I-1-1- الصيغة القانونية والمختلطة للبرنامج الخطي¹:

▪ الصيغة القانونية:

هناك نوعان من صيغ البرامج الخطية وهي حسب الحالة كما يلي:

أ. حالة التعظيم: في هذه الحالة تكون الصيغة القانونية للبرنامج الخطي على النحو التالي:

- دالة الهدف تكون في حالة تعظيم؛
 - التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أصغر أو تساوي عددا ثابتا موجبا؛
 - جميع المتغيرات تكون غير سالبة.
- أي أن الصيغة القانونية تكتب كما يلي²:

$$Max(z) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots\dots\dots C_nx_n$$

s / c

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots\dots a_{in}x_n \leq b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right.$$

$$x_1; x_2; \dots\dots\dots; x_n \geq 0$$

أما الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي:

$$Max(z) = C'X$$

s / c

$$\{AX \leq B$$

$$X \geq 0$$

حيث: C' يعبر عن سطر معاملات دالة الهدف، A تعبر عن مصفوفة القيود، أما B فتعبر

عن شعاع الثوابت .

¹. راتول محمد، مرجع سابق، ص 41.

²- J.M.Boussard, J. J.Daudin, " la programmation linéaire dans les modèles de production", Masson, Paris, 1998 . P 27 .

ب. حالة التدنئة: فحتى يأخذ البرنامج الخطي شكل الصيغة القانونية يجب أن يتميز بما يلي:

- دالة الهدف تكون في حالة تدنئة ؛
 - التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أكبر أو تساوي عددا ثابتا موجبا؛
 - جميع المتغيرات تكون غير سالبة.
- أي أن الصيغة القانونية تكتب كما يلي:

$$\text{Min}(z) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots \dots \dots C_nx_n$$

s / c

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \dots \dots a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \dots \dots a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots \dots \dots a_{in}x_n \geq b_i \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots \dots \dots a_{mn}x_n \geq b_m \end{array} \right.$$

$$x_1; x_2; \dots \dots \dots; x_n \geq 0$$

أما الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي:

$$\text{Min}(z) = C'X$$

s / c

$$\{AX \geq B$$

$$X \geq 0$$

■ **الصيغة المختلطة:** وشروط هذه الصيغة:

- أن تكون دالة الهدف مكتوبة على شكل تعظيم أو تدنئة؛
 - أن تكون القيود مكتوبة بإشارة أقل أو يساوي أو أكبر أو يساوي أو هيئة معادلة أي مساواة؛
 - جميع المتغيرات تكون غير سالبة.
- أي أن الصيغة المختلطة تكتب كما يلي¹:

¹- Mustapha Nabil , " **recherche opérationnelle et Mathématiques appliqués a la gestion des entreprises**",Dunod, France,1985 , p 31 .

$$\begin{aligned} \text{Min_or_Max}(z) &= C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n \\ s/c & \left\{ \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\geq, =, \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\geq, =, \leq b_2 \\ &\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &\geq, =, \leq b_i \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\geq, =, \leq b_m \end{aligned} \right. \\ x_1; x_2; \dots; x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

I-1-2- الصيغة النموذجية للبرنامج الخطي:

وفيها تكون كل القيود على شكل معادلات، أما دالة الهدف فتكون إما في صيغة تعظيم أو صيغة تدنئة، تعتبر الصيغة النموذجية ضرورية لإيجاد الحل الأساسي للبرنامج بطريقة السمبلكس، إذ يجري تحويل أية صيغة مهما كان شكلها إلى الصيغة النموذجية، بإعتبار ذلك أول خطوة في إتجاه الحل. تتطلب الخطوة الأولى في الطريقة السمبلكس تحويل القيود من صيغة متراجحات إلى صيغة معادلات كالآتي¹:

■ إذا كانت إشارة القيد أقل من أو يساوي يتم إضافة متغير مكمل إلى الجانب الأيسر للقيد ويسمى " متغير الفجوة " أو المتغير الزائد أو المتغير الراكد ويرمز له بالرمز $(S_i; i=1,2,\dots,m)$ ويظهر هذا المتغير بمعامل صفر في دالة الهدف، ويمثل المتغير الفجوة موارد غير مستخدمة مثل الوقت المستغرق على الآلة، ساعات العمل، الأموال، ساحات المحزن، أو أي من الموارد في المشكلات التي تواجهها المؤسسات. إذا كان القيد مثلاً كما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

يصبح القيد:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + S_1 = b_1$$

■ إذا كانت إشارة القيد أكبر من أو يساوي يتم طرح متغير فائض من الجانب الأيسر للقيد ويسمى " متغير الفجوة " ويرمز له بالرمز $(S_i; i=1,2,\dots,m)$ ثم نضيف متغير وهمي أو اصطناعي

¹. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 70 .

(Artificielle) إلى الجانب الأيسر للقيود ويرمز له بالرمز (Ai)، ويظهر المتغير الفجوة بمعامل صفر في دالة الهدف، أما المتغير الاصطناعي فيظهر بمعامل (M) في دالة الهدف والتي ترمز إلى معامل رقمي كبير جداً، أما إشارتها في دالة الهدف فتكون موجبة (+M) عندما تكون دالة الهدف تخفيض أو تقليل، أما إذا كانت دالة الهدف تعظيم فإن إشارتها تكون سالبة (-M). فمثلاً إذا القيود على الشكل التالي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

يصبح القيد:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - S_1 + A_1 = b_1$$

تضاف المتغيرات الاصطناعية إلى المتراجحات الخطية التي تفصل بين طرفيها علامة من نوع أكبر أو يساوي أو المساواة وذلك بهدف الحصول على الحل الأساسي الممكن، وبعد أن يتم الحصول على هذا الحل (الحل الممكن) يجب أن يتم التخلص من هذه المتغيرات وأبعادها عن النموذج (كما سيأتي شرحه في حالة طريقة M الكبيرة أو Big-M)¹.

■ إذا كانت إشارة القيد يساوي (=) يتم إضافة متغير وهمي أو اصطناعي إلى الجانب الأيسر للقيود ويرمز له بالرمز (Ai)، والجدول التالي يبين القواعد السابقة:

إشارة القيد	الإجراء على القيد	دالة الهدف تدنئة (Min)	دالة الهدف تعظيم (Max)
أقل من أو يساوي	+1S _i	+0S _i	+0S _i
أكبر من أو يساوي	-1S _i +1A _i	1S _i +MA _i	1S _i -MA _i
يساوي	+1A _i	+MA _i	-MA _i

مثال رقم (01): أوجد الصيغة النموذجية للبرنامج الخطي الآتي:

$$Max(z) = x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 + x_3 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1; x_2; x_3 \geq 0$$

¹. حامد سعد نور الثمري، مرجع سابق، ص 54.

الحل: القيد الأول عبارة عن قيد مساواة إذن:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + A_1 = 10$$

القيد الثاني يحمل إشارة أكبر من أو يساوي إذن:

$$x_2 + x_3 \geq 4 \Rightarrow x_2 + x_3 - S_1 + A_2 = 4$$

القيد الثالث حمل إشارة أصغر من أو يساوي ومنه:

$$x_1 + x_3 \leq 5 \Rightarrow x_1 + x_3 + S_2 = 5$$

أما دالة الهدف تصبح على النحو التالي:

$$Max(z) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1 - MA_2$$

I-2- إعداد جدول الحل الأولي:

تبدأ الطريقة السمبليكس بحل الأولي ممكن حيث تكون قيم جميع المتغيرات الحقيقية (مثل) مساوية لـ(0)، ينتج عن هذا الحل الإعتيادي ربحاً مقداره (0)، وتبدأ الطريقة المبسطة عند هذه النقطة ومن ثم سنتحرك نحو بقية النقاط عند الأركان الأخرى إلى أن نصل إلى الحل الأمثل¹.

تكوين جدول الحل الأولي (الأساسي) للحصول على حل أولي ممكن والذي يناظر الحل الأولي عند نقطة الأصل في طريقة الحل البياني، ويكون تنظيم بيانات الشكل الصيغة النموذجية من حالة دالة التعظيم في جدول الحل الأولي كما هو مبين في الجدول التالي:

¹ -P.Chrétiene, Y.Pesyux, G.Raudjean, " Algorithmes et pratique de programmation linéaire", édition telmic, Paris, 1980. P 17 .

T ₁	C _J	C ₁	C ₂	C _n	0	0	0	
CB	XB	X ₁	X ₂	X _n	S ₁	S ₂	S _m	B
0	S ₁	a ₁₁	a ₁₂	a _{1n}	1	0	0	b ₁
0	S ₂	a ₂₁	a ₂₂	a _{2n}	0	1	0	b ₂
:	:	:	:	:	:	:	:	:
0	S _i	a _{i1}	a _{i2}	a _{in}	0	0	0	b _i
:	:	:	:	:	:	:	:	:
0	S _m	a _{m1}	a _{m2}	a _{mn}	0	0	1	b _m
Z _J		0	0	0	0	0	0	
ΔZ = C _J - Z _J		C ₁	C ₂	C _n	0	0	0	Z=0

حيث:

$$Z_J = CB'X_J S_J$$

$$Z = CB'B$$

نلاحظ أن متغيرات الأساس الموضوع في العمود الثاني من الجدول هي نفسها المقابلة للقيمة (1) من أعمدة المصفوفة الأحادية، وتكون في الجدول الحل الأساسي الأول إما متغيرات فجوة أو متغيرات لإصطناعية أو هم معا، وفي المراحل اللاحقة تزيحها الخوارزمية، وتحل محلها متغيرات أخرى.

وفي هذا الجدول تكون قيم المتغيرات داخل الأساس هي القيم المقابلة لها في العمود الأخير (عمود الثوابت)، أي: (S₁ = b₁; S₂ = b₂; S_m = b_m)

أما قيمة الدالة الاقتصادية فهي معدومة، أما بقية عناصر السطر الأخير فتعبر عن تغير

معاملات دالة الهدف طيلة مراحل الحل.

مثال رقم (02): أوجد الصيغة النموذجية والجدول الحل الأساسي الأول للبرنامج الخطي التالي:

$$Max(z) = 7x_1 + 5x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 240 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 240 \end{cases}$$

$$x_1; x_2 \geq 0$$

✓ الصيغة النموذجية:

تصبح القيود أعلاه كما يأتي:

$$2x_1 + x_2 + S_1 = 100 \quad \text{القيود الأول:}$$

$$4x_1 + 3x_2 + S_2 = 240 \quad \text{القيود الثاني:}$$

وهذا يعني بأن عدد ساعات المستخدمة كانت أقل من 100 ساعة بالنسبة للقيود الأول و 240 ساعة بالنسبة للقيود الثاني.

إن المتغيرات الفجوة لا تحقق أي ربح، فإنه سيتم إضافتها إلى دالة الهدف الأصلية وبمعامل (0)، وعليه تصبح معادلة دالة الهدف:

$$Max(z) = 7x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

✓ جدول الحل الأساسي الأول للبرنامج:

T ₁	C _J	7	5	0	0	
CB	XB	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	B
0	S ₁	2	1	1	0	100
0	S ₂	4	3	0	1	240
	Z _J	0	0	0	0	
	ΔZ = C _J - Z _J	7	5	0	0	Z=0

المتغيرات الغير الأساسية

المتغيرات الأساسية

يطلق على الحل الابتدائي مصطلح "الحل الممكن الأساسي" ويوصف بالصيغة الآتية:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 240 \end{pmatrix}$$

هذا هو الحل الممكن الأساسي بصيغة الأعمدة.

المتغيرات التي يطلق عليها بالمتغيرات الأساسية في البرمجة الخطية هي (S₁, S₂)، أما المتغيرات التي لا يضمها مزيج الحل أو غير الأساسية (X₁, X₂) في مثالنا يطلق عليها المتغيرات غير الأساسية.

I-3- إجراءات الحل بطريقة السمبلكس:

إنطلاقاً من الجدول الأول نحضر لإعداد جدول الحل الأساسي الثاني " الجدول الثاني " وذلك بإختيار المتغيرة التي تدخل الأساس والمتغيرة التي تخرج من الأساس وكذلك عنصر الإرتكاز.

سندرج فيما يأتي الخطوات ثم نشرحها بدقة ونطبقها لإستكمال الجدول الثاني والثالث للحل¹:

■ **الخطوة (01):** تحديد المتغير الذي سيدخل مزيج الحل لاحقاً، و إحدى الطرق للقيام بذلك هو عن طريق تحديد العمود، ويتم على أساس قيم صف تقييم الحل $(\Delta Z = C_j - Z_j)$ فإذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) نختار المتغير صاحب أعلى قيمة موجب في صف $(\Delta Z = C_j - Z_j)$ ويسمى العمود الذي يقع فيه بالعمود المحوري أو بعمود عنصر الإرتكاز (Pivot Column)، ومن ثم المتغير أكبر قيمة موجبة في صف $(\Delta Z = C_j - Z_j)$ في الجدول السابق، هذا يعني أننا سننتج الآن بعض المنتجات التي ستسهم في تحقيق أعظم ربح إضافي للوحدة الواحدة. من جدول الحل الأولي للمثال السابق رقم (02) نجد أن قيمة المتغير (X_1) في الصف $(\Delta Z = C_j - Z_j)$ تساوي (7) وهي أعلى قيمة موجبة وهذا يعني أن إضافة وحدة واحدة من (X_1) لمزيج الحل سيساهم بزيادة الربح بمقدار (7) دينار، أما المتغيرة (X_2) فإن القيمة المقابلة له في الصف $(\Delta Z = C_j - Z_j)$ كانت (5) دينار فقط، أما المتغيرتين $(S_1; S_2)$ فكانت قيمهما المقابلة في صف $(\Delta Z = C_j - Z_j)$ صفر لكل منهما، وهذا يعني أن دخولهما مزيج الحل سوف لن يضيف أي شيء للربح المتوقع، وعليه سنختار المتغير (X_1) ليكن المتغير الداخل، وعليه سيكون العمود الذي يحتويه هو عمود الإرتكاز؛

■ **الخطوة (02):** نحدد المتغير الذي سيتم استبداله (المتغير الخارج)، لإننا إختارنا متغير جديد سيدخل مزيج الحل، ينبغي أن نحدد أي من المتغيرات الأساسية الحالية ينبغي أن يخرج ويتم إنجاز هذه الخطوة عن طريق قسمة قيم عمود الكميات (B) على قيم عمود المحور الإرتكاز (القيم فقط الموجبة والغير معدومة) الذي تم إختياره في الخطوة (01)، الصف الذي يحقق أقل قيمة موجبة سيتم إستبداله في الجدول اللاحق (هذا الرقم الأقل قيمة موجبة بالمناسبة يعطي أكبر رقم من الوحدات للمتغير الذي سيحل محله في الحل)، ويشار إلى هذا الصف بـ الصف المحور أو صف الإرتكاز (Pivot Row)، الرقم الذي يقع ضمن نقطة تقاطع صف الإرتكاز مع عمود الإرتكاز يشار له بـ العنصر المحوري أو عنصر الإرتكاز (Pivot Number)، طالما أن المتغير (X_1) سيدخل مزيج الحل، ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيتم إستبداله سيكون هناك عدداً من المتغيرات الأساسية بقدر عدد القيود في مشكلة البرمجة الخطية، وعليه فإما (S_1) أو (S_2)

¹. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص ص : 153-157.

سيخرج من جدول الحل ليحل محله المتغير الداخل (X_1) كمتغير أساسي ولتحديد صف الإرتكاز، فإننا سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز وعليه:

$$\text{Min} \left\{ \frac{100}{2} = 50, \frac{240}{4} = 60 \right\} = \text{Min} \{50, 60\} = 50$$

الرقم الموجب الأصغر يشير إلى أعظم رقم من الوحدات من (X_1) يمكن إنتاجها دون أن ينتهك أي من القيود الأصلية، إنها أيضا تشير إلى أن الصف الإرتكاز سيكون الصف الأول الذي يقابل النسبة (50)، هذا يعني أن بأن (S_1) سيكون المتغير الذي سيتم استبداله في هذه الخطوة، أما عنصر الإرتكاز هو الرقم الذي يقع عند تقاطع صف الإرتكاز مع عمود الإرتكاز وهو يقع في الصف الأول والعمود الأول وهو (2).

ولتوضيح ما سبق في الخطوة رقم (01) و (02) في الجدول الأولي السابق كآتي:

عنصر الإرتكاز

T_1	C_j	7	5	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B	$\frac{B}{X_1}$
0	S_1	2	1	1	0	100	50
0	S_2	4	3	0	1	240	60
Z_j		0	0	0	0		
$\Delta Z = C_j - Z_j$		7	5	0	0	Z=0	

صف الإرتكاز

عمود الإرتكاز

- الخطوة (03): يتم تعديل جدول الأولي بتكوين جدول جديد عن طريق إجراء بعض التعديلات على مصفوفة المعاملات في جدول الحل الأولي، حيث يرتبط الجدول الجديد بجدول الحل الأولي باعتبار الجدول الجديد مرحلة لاحقة لجدول الحل الأولي، وتتلخص إجراءات تكوين الجدول الجديد بما يلي:

- تحتسب قيم صف المتغير الداخل إلى الحل عن طريق قسمة قيم عناصر الصف الإرتكاز على عنصر الإرتكاز، ويسمى الصف الناتج بصف العمل (Working Row) من المثال السابق لدينا القيم الجديدة لصف الإرتكاز كما يلي:

$$X_1 = \left(\frac{2}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{0}{2}; \frac{100}{2} \right) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 50 \right)$$

ستظهر القيم الجديدة لصف الإرتكاز بأكمله في الجدول الجديد، ونلاحظ بأن (X_1) سيظهر في مزيج الحل وأنه سيتم إنتاج (50) وحدة من (X_1) ، وهذا سيحقق حتماً ربحاً أكبر من (0) كما هو الحال في جدول الحل الأولي.

T_2	C_j	7	5	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
7	X_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	50

الصف الأول الجديد

- تحتسب قيم الصفوف الأخرى باستخدام القواعد التالية:

قيم الصف الجديدة = القيم الحالية (القديمة) للصف - (الرقم المناظر للرقم الإرتكاز X الرقم المقابل في صف العمل). أما الرقم المناظر للرقم الإرتكاز هو الرقم الذي يقع أسفل أو أعلى الرقم الإرتكاز.

قيم الصف الثاني الجديدة =

$$S_2 = (4; 3; 0; 1; 240) - 4 \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 50 \right) = (0; 1; -2; 1; 40)$$

T_2	C_j	7	5	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
0	S_2	0	1	-2	1	40

الصف الثاني الجديد

▪ **الخطوة (04):** وبعد الإنتهاء من عملية الحساب قيم الصفوف تتم عملية اختبار أمثلية الحل، لكن لا بد من إجراء الخطوة الأخيرة لإكمال الجدول الثاني واختبار الحل هو إستخراج تأثير دالة الهدف وتتضمن هذه الخطوة حساب قيم كلا من صف (Z_j) و $(\Delta Z = C_j - Z_j)$ ، ونكرر بأن دخول (Z_j) في عمود الكميات يعطينا إجمالي الربح الذي يتحقق من الحل الحالي، أما بقية

قيم (Z_j) ، فإنها تمثل إجمالي الربح المتوقع من إضافة وحدة واحدة من كل متغير إلى الحل الجديد وتحسب قيم (Z_j) كما يأتي:

$$Z_j = CB'X_jS_j$$

$$Z_j = (7 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

أما قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = CB'B = (7 \quad 0) \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \end{pmatrix} = 350$$

وسيتم وضع قيم (Z_j) و (ΔZ) ، في الجدول الحل الثاني وكما مبين في الجدول التالي:

T_2	C_j	7	5	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B	$\frac{B}{X_2}$
7	X_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	50	100
0	S_2	0	1	-2	1	40	40
Z_j		7	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	0		
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	0		Z=350

إن الحل الحالي يشير إلى أن الشركة حتى الآن ستقوم بإنتاج 50 وحدة من (X_1) ، و(0) وحدة من (X_2) ، لتحقيق ربحاً مقداره 350 دينار، (X_1) هو متغير أساسي، أما (X_2) فهو متغير غير أساسي، أما المتغيرة الفجوة (S_2) تبين كمية الوقت غير المستخدم، وهو أحد المتغيرات الأساسية وقيمتها هي 40، وهذا يعني أن 40 ساعة لا تزال موجودة، أما المتغيرة الفجوة (S_1) فهو متغير غير أساسي لذا فإن عدد الساعات يساوي (0).

أن الصف (ΔZ) مهماً بالنسبة لنا لسببين: الأول إنه يشير إذا ما كان الحل الحالي هو الحل الأمثل أم لا؟ فعندما لا تكون هناك قيم موجبة في الصف، فهذا يعني الوصول للحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية، وفي مثالنا ومن خلال القيم الموجودة في الصف (ΔZ) في الجدول نجد بأن قيم (X_1)

و(S_1) و(S_2) سالبة أو صفرية، أما قيمة (X_2) فهي ($\frac{3}{2}$) وهذا يعني بأن صافي الربح يمكن أن يزيد بمقدار ($\frac{3}{2}$) لكل وحدة مضافة على الحل الحالي.

ولأن قيمة (X_1) في صف (ΔZ) تساوي الصفر، فهذا يعني أن إضافة وحدة واحدة من (X_1) سوف لن يضيف شيئاً إلى الربح، لذا فإنه سيبقى دون تغيير.

طالما أنه لم تكن جميع القيم في الصف (ΔZ) في الجدول الأخير سالبة أو معدومة، لذا فإن هذا الجدول لا يمثل جدول الحل الأمثل، وينبغي أن نعيد خطوات السمبليكس السابقة الذكر.

سيدخل المتغير (X_2) الحل اللاحق لأنه يحمل أكبر قيمة موجبة في الصف (ΔZ) بل إنه القيمة الوحيدة في الصف، هذا يعني أنه سيكون عمود (X_2) هو عمود الإرتكاز، تتضمن الخطوة الموالية تحديد صف الإرتكاز وستقسم قيم عمود الكميات المتاحة على عمود الإرتكاز القيمة الأصغر هي لـ(S_2)، وعليه سيغادر عمود المتغيرات الأساسية ليحل محله المتغير (X_2)، وقيمة عنصر الإرتكاز هي (01) كما هي موضحة في الجدول السابق.

▪ **الخطوة (05):** تطوير جدول الحل الثالث ويتم استبدال صف الإرتكاز من خلال قسمة كل رقم

فيه على العنصر الإرتكاز هو (1)، ولأن القسمة على (1) لذا سوف لن تتغير القيم، وعليه ستكون قيم المتغير الداخل في جدول الحل الجديد لذي سيحل محل المتغير الخارج (S_2).

T_3	C_j	7	5	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
5	X_2	0	1	-2	1	40

القيم الجديدة لصف (X_1) يمكن حسابها الآن كما يأتي:

$$X_1 = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 50 \right) - \frac{1}{2} (0; 1; -2; 1; 40) = \left(1; 0; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 30 \right)$$

وهكذا ستكون قيم صف (X_1) والتي ستظهر في الجدول الثالث مبينة بالآتي:

T_3	C_j	7	5	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
7	X_1	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	30

وأخيراً صفي تحسب في الجدول الثالث كما يأتي:

$$Z_j = CB'X_j S_j$$

$$Z_J = (7 \quad 5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \left(7 \quad 5 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \right)$$

أما قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = CB'B = (7 \quad 5) \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = 410$$

ومنه جدول الحل الثالث هو كالاتي:

T ₃	C _J	7	5	0	0	
CB	XB	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	B
7	X ₁	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	30
5	X ₂	0	1	-2	1	40
Z _J		7	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
ΔZ = C _J - Z _J		0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-3}{2}$	Z=410

جدول الحل الأمثل لأن: $\Delta Z \leq 0$

بما أن (ΔZ) في الجدول الثالث سالبة أو معدومة، ذلك يعني أنه تم الوصول للحل الأمثل والحلول هي كما يلي:

$$X_1 = 30; X_2 = 40; S_1 = 0; S_2 = 0; Z = 410$$

وعادةً يحتمل أن تكون هناك أخطاء رياضية عند المرور بخطوات السمبليكس المتعددة وعليه ستكون فكرة جيدة التحقق من الحل النهائي الذي توصلت إليه، ويمكن أن يتم ذلك في جزء عن طريق النظر إلى القيود ودالة الهدف .

القيود الأول: محقق تماماً

$$2x_1 + x_2 \leq 100 \Rightarrow 2(30) + 40 = 100$$

القيود الثاني: محقق تماماً

$$4x_1 + 3x_2 \leq 240 \Rightarrow 4(30) + 3(40) = 240$$

دالة الهدف: الربح

$$Max(z) = 7x_1 + 5x_2 = 7(30) + 5(40) = 410$$