الفصل الرابع

النموذج المقابل أو البرمجة الثنائية (Dualité)

لكل مشكلة برمجة خطية هناك مشكلة أخرى مرتبطة بها، نسمي إحدى هاتين المشكلتين بالمشكلة الأولية (Primal Model)، والأخرى نسميها النموذج المقابل (Dual Model) وتمتلك كلتا المشكلتين خواص مرتبطة مع الخواص الأخرى، فمثلاً الحل الأمثل لإحدى هاتين المشكلتين يعطي معلومات كاملة عن الحل الأمثل للأخرى.

أي أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل ومشتق منه، فإذا كان النموذج الأولى يتعلق بتعظيم دالة الهدف فإن النموذج المقابل له سيكون تدنئة دالة الهدف وتصاغ عادة من نفس البيانات التي يتضمنها النموذج الأول والعكس بالعكس.

إن اللجوء إلى استخدام النموذج المقابل يتضمن فوائد متعددة منها سهولة التوصل إلى تحقيق الحل الأمثل لمشاكل البرمجة الخطية وسرعته عندما يصعب حل النموذج الأولي، لذلك سيتم التطرق في هذا الفصل إلى بعض القواعد الرياضية لتحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل وبالعكس، كذلك صياغة وإيجاد الحل للمشكلة المقابلة والتي نلاحظ بأن طريقة الحل لا تختلف كثيراً عن الحل بأسلوب الطريقة البسيطة للنموذج الأولي.

I- مميزات النموذج المقابل (الثنائي):

من مميزات النموذج المقابل الآتي:

- ✓ يساعد النموذج المقابل على التوصل إلى الحل بصورة أسرع في بعض الأحيان وذلك بتقليص خطوات الحل، أي أن طريقة حل المشكلة المقابلة تستلزم خطوات رياضية اقل تعقيد من الخطوات اللازمة لحل المشكلة الأولية أحياناً[1]؛
- ✓ للتخلص من الإشارة السالبة في الجانب الأيمن (أن وجدت) أي عندما تكون المصادر ذات كميات سالبة وهو أهم ما يمكن الحصول عليه في حالة التحويل إلى النموذج الثنائي[2]؛
- ✓ لغرض التعرف على ابعاد المشكلة الأخرى (المشكلة الثنائية، البديلة) فإذا كان النموذج الأولي (Primal) وبصيغة الـ (Max) أي المشكلة بالصيغة الربحية، فبإمكاننا التعرف على النموذج الثنائي ويكون بصيغة الـ (Min) وتمثيله للجانب الكلفوي (في نفس المشكلة)، ولنفس المشكلة المعبر عنها أولا بالصيغة الأولية.

[1]. دلال صادق الجواد ، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص 100 .

[2]. حامد سعد نور الشمرتي ، مرجع سابق. ص 76 .

- ✓ يعطي النموذج الثنائي (المقابل) كثير من الحقائق الإقتصادية التي تساعد على تفهم أبعاد المشكلة وبخاصة فيما يتعلق بأسعار الظل؛
- ✓ يعيد النموذج الثنائي اثر التغيرات في معاملات دالة الهدف وثوابت الطرف الأيمن ومعرفة المجال الذي تتحقق فيه نتائج الحل الأمثل؛
- ✓ بالإمكان إضافة قيود جديدة للمشكلة وإيجاد حل أمثل لها وفقاً للقيود المضافة، ومنها نستنتج أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية نموذجاً مقابلاً، كما لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية نموذجاً أولياً[1].

II – خطوات تحويل النموذج الأولي (Primal) إلى النموذج المقابل أو الثنائي (Dual):

لغرض تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل وبالعكس يمكن ذلك باتباع الخطوات الآتية[2]:

- ✓ نعكس صيغة دالة الهدف، فإذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي بصيغة تدنئة فإننا نعكسها ونجعلها للنموذج المقابل بصيغة تعظيم والعكس بالعكس؛
- ✓ استبدال المتغيرات المشار إليها بالرمز (X) في النموذج الأولي إلى متغيرات مشار لها بالرمز (Y) في النموذج المقابل وتحويل رمز دالة الهدف من (Z) في النموذج الأولي إلى (W) في النموذج المقابل؛
- ✓ جعل القيم التي تقع في الجهة اليمنى من قيود النموذج الأولي (ثوابت القيود) معاملات للمتغيرات الجديدة في دالة هدف النموذج المقابل؛
- ✓ جعل معاملات متغيرات دالة هدف النموذج الأولي، الطرف الأيمن للقيود الجديدة للنموذج المقابل؛
- ✓ تحويل مصفوفة المعاملات للمتغيرات في القيود النموذج الأولي بحيث تصبح الصفوف أعمدة و الأعمدة صفوف (إيجاد منقول مصفوفة معاملات المتغيرات)؛
- ✓ إضافة شرط عدم السلبية على المتغيرات الجديدة؛
- ✓ تغير إشارة القيود من (≤) إلى (≥) أو العكس.

---

[1]. سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، ص 110.

[2]. فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي، مرجع سابق، ص 79.

ملاحظة[1]:

1. إذا كان عدد متغيرات النموذج الأولي تساوي (N) وعدد القيود (M) فإن عدد متغيرات النموذج المقابل تساوي (M) وعدد القيود (N)؛
2. عند التحويل من النموذج الأولي إلى نموذج مقابل يجب مراعاة ما يلي:

- إذا كانت دالة الهدف (Max) فيجب أن تكون القيود كلها أقل من أو يساوي (≤)؛
- إذا كانت دالة الهدف (Min) فيجب أن تكون القيود كلها أكبر من أو يساوي (≥)؛
- إذا لم تتحقق هذه الشروط فيجب تحقيقها في الأمثلة.

III- صياغة المشكلة المقابلة (الثنائية):

هناك صيغتين للبرامج الخطية، الصيغة القانونية والصيغة المختلطة سوف نحاول توضيح كيفية أيجاد الصيغة المقابلة لكل منهما.

1-III – ثنائية الصيغ القانونية: إذا كان البرنامج الأولي بالشكل المصفوفي في صيغته القانونية التالية[2]:

$$\begin{aligned}
&Max(z) = C'X \\
&s/c \\
&\{AX \leq B \\
&X \geq 0
\end{aligned}$$

فإن برنامجه الثنائي يكتب كما يلي:

$$\begin{aligned}
&Min(w) = B'Y \\
&s/c \\
&\{A'Y \geq C \\
&Y \geq 0
\end{aligned}$$

[1]. فتحي خليل حمدان، مرجع سابق، ص 130

[2]. راتول محمد، مرجع سابق، ص81.

مثال رقم (01): أوجد النموذج المقابل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية:

النموذج الأولي (Primal):	النموذج الثنائي (Dual):
$Max(z)=5x_1+6x_2$ s/c $\begin{cases} x_1+9x_2\leq 60 \\ 2x_1+3x_2\leq 45 \\ 5x_1-2x_2\leq 20 \\ x_2\leq 30 \end{cases}$ $x_1;x_2\geq 0$	$Min(W)=60y_1+45y_2+20y_3+30y_4$ s/c $\begin{cases} y_1+2y_2+5y_3\geq 5 \\ 9y_1+3y_2-2y_3+y_4\geq 6 \end{cases}$ $y_1;y_2;y_3;y_4\geq 0$

يلاحظ أن مصفوفة أمثال القيود في المشكلة الأولية هي منقول مصفوفة أمثال القيود النموذج المقابل، ويلاحظ في هذا المثال، أن عدد القيود في النموذج المقابل أقل منها في المشكلة الأولية. بما أن الحل الأمثل لإحدى المشكلتين يمكن الحصول عليه من الحل الأمثل للمشكلة الأخرى، فإنه سيكون من الأسهل حل النموذج المقابل في هذه الحالة، وذلك لأن الصعوبات الحسابية في حل مشكلة البرمجة الخطية التي تأتي من كثرة القيود أكثر من تلك التي تأتي من كثرة المتغيرات، وهذا يعطي إحدى فوائد دراسة المشاكل المقابلة.

مثال رقم (02): حول نموذج البرمجة الخطية لآتي إلى النموذج الثنائي (المقابل):

النموذج الأولي (Primal):	النموذج الثنائي (Dual):
$Min(z)=5x_1+2x_2+x_3$ s/c $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3\geq 20 \\ 6x_1+8x_2+5x_3\geq 30 \\ 7x_1+x_2+3x_3\geq 40 \\ x_1+2x_2+4x_3\geq 50 \end{cases}$ $x_1;x_2;x_3\geq 0$	$Max(W)=20y_1+30y_2+40y_3+50y_4$ s/c $\begin{cases} 2y_1+6y_2+7y_3+y_4\leq 5 \\ 3y_1+8y_2+y_3+2y_4\leq 2 \\ y_1+y_2+3y_3+4y_4\geq 6 \end{cases}$ $y_1;y_2;y_3;y_4\geq 0$

III-2 - ثنائية الصيغ المختلطة: وهي الصيغة تكون فيها المتراجحات $(\leq;\geq)$ وتوجد معادلة بصيغة مساواة وكل منها معاملة خاصة كالآتي[1]:

في حالة وجود قيد بإشارة يساوي (=) في النموذج الأولي، يتم تحويل هذا القيد إلى قيدين بإشارتين مختلفتين أحدهما بإشارة أقل من أو يساوي، والآخر بإشارة أكبر من أو يساوي، وفي حال كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تعظيم (Max) نقوم بتحويل القيد الذي إشارته أكبر من أو يساوي إلى القيد أقل من أو يساوي عن طريق ضرب القيد الأكبر أو يساوي في (-1)، وفي حال كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تخفيض (Min) نقوم بتحويل القيد الذي إشارته أقل من أو يساوي إلى قيد إشارته أكبر من أو يساوي عن طريق ضرب القيد الأقل أو يساوي في (-1)، وعلى أية حال يجب أن تكون إشارات قيود النموذج الأولي متماثلة قبل تحويله إلى النموذج المقابل.

مثال رقم (03): حول النموذج الأولي (Primal) الآتي إلى النموذج المقابل (Dual):

$$Max(z) = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 18 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 20 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 9 \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0$$

الحل: نحول القيد الثالث إلى الشكل أقل من أو يساوي ويتم ذلك بضرب القيد الثالث بـ (-1). فيصبح القيد:

$$x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 9 \Rightarrow (-1)\times(x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 9)$$
$$-x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \leq -9$$

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 131.

ويكون النموذج بشكله النهائي كالآتي:

$$
\begin{aligned}
&Max(z) = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\
&s/c \\
&\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 18 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 20 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \leq -9 \end{cases} \\
&x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

وسيكون النموذج المقابل كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&Min(W) = 18y_1 + 20y_2 - 9y_3 \\
&s/c \\
&\begin{cases} 3y_1 + 5y_2 - y_3 \geq 1 \\ -2y_1 + y_3 \geq 1 \\ y_1 + 6y_2 - 4y_3 \geq -1 \\ 5y_1 - y_3 \geq -1 \end{cases} \\
&y_1; y_2; y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

مثال رقم (04): حول النموذج الأولي (Primal) الآتي إلى النموذج المقابل (Dual):

$$
\begin{aligned}
&Max(z) = 2x_1 - x_2 \\
&s/c \\
&\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \\
&x_1; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

الحل: لمعالجة القيود عندما تكون في حالة المساواة، يجب أولاً تعبير عن كل قيد مساواة بقيدين أحدهما أكبر أو يساوي والأخر أقل أو يساوي، وبعد ذلك تعديل جميع القيود أن تكون من نوع واحد أي أقل من أو يساوي ليتلاءم مع دالة الهدف تعظيم وذلك بضرب بـ (-1).

المرحلة الثانية:	المرحلة الأولى:
$Max(z)=2x_1-x_2$ s/c $\begin{cases} x_1+3x_2\le 7 \\ -x_1-3x_2\le -7 \\ x_1-x_2\le 3 \\ -x_1+x_2\le -3 \end{cases}$ $x_1;x_2\ge 0$	$Max(z)=2x_1-x_2$ s/c $\begin{cases} x_1+3x_2\le 7 \\ x_1+3x_2\ge 7 \\ x_1-x_2\le 3 \\ x_1-x_2\ge 3 \end{cases}$ $x_1;x_2\ge 0$

ومن البرنامج المقابل كما يلي:

$$Min(W)=7y_1-7y_2+3y_3-3y_4$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} y_1-y_2+y_3-y_4\ge 2 \\ 3y_1-3y_2-y_3+y_4\ge -1 \end{cases}$$
$$y_1;y_2;y_3;y_4\ge 0$$

IV- العلاقة بين حل النموذجين الأولي والثنائي[1]:

- القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة والتي تظهر في السطر الأخير تساوي قيم المتغيرات الرئيسية على وجه الترتيب للبرنامج الثنائي وبالقيمة المطلقة؛
- وقيم متغيرات الفجوة في البرنامج الثنائي التي تظهر في السطر الأخير تساوي على وجه الترتيب قيم المتغيرات الرئيسية في البرنامج الأولي؛
- قيم المتغيرات الحقيقية في البرنامج الأولي والتي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للبرنامج الثنائي والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل، وقيم المتغيرات الحقيقية للبرنامج الثنائي والتي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للبرنامج الأولي والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل (بالقيمة المطلقة)؛
- قيمة الدالة الإقتصادية في الحل الأمثل للبرنامجين تكون متساوية، وفي كلا الحالتين تأخذ قيمتها المطلقة.

[1]. راتول محمد، مرجع سابق، ص ص: 83-84 .

مثال رقم (05): من البرنامج الخطي التالي

$$Max(z) = 12x_1 + 48x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 24 \\ -4x_1 \le -8 \end{cases}$$
$$x_1 ; x_2 \ge 0$$

المطلوب:

1. أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الأولي؛
2. أوجد الحل الأمثل للبرنامج الأولي ثم البرنامج الثنائي، ثم قارن نتائج الحل في البرنامجين، وماذا تستنتج؟

الحل:

1. البرنامج المقابل يكتب كما يلي:

$$Min(W) = 10y_1 + 24y_2 - 8y_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 - 4y_3 \ge 12 \\ 2y_1 + 3y_2 \ge 48 \end{cases}$$
$$y_1 ; y_2 ; y_3 \ge 0$$

2. وعند حل النموذجين (الأول والثاني) أعلاه وبطريقة السمبليكس، سوف نبين الجداول النهائية، أي جداول الحل الأمثل للنموذجيين وبيان العلاقة بين الحلين في قيم المتغيرات الأولية والبديلة الثنائية.

- جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي:

XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
X_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	4
S_2	0	0	$\frac{-3}{2}$	1	$\frac{3}{8}$	6
X_1	1	0	0	0	$\frac{-1}{4}$	2
$\Delta Z = C_J - Z_J$	0	0	24	0	3	$Z = 216$

$w = 216$

$S_1 = 0$; $S_2 = 0$

$y_1 = 24$; $y_2 = 0$; $y_3 = 3$

- جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي:

YB	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	B
Y_1	1	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	24
Y_3	0	$\frac{-3}{8}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	3
$\Delta W = C_J - Z_J$	0	−6	0	−2	−4	$W = 216$

$Z = 216$

$S_1 = 0\,;\ S_2 = 6\,;\ S_3 = 0$

$X_1 = 2\,;\ X_2 = 4$

- المقارنة والاستنتاج: من جدول الحل الأمثل لبرنامج الحل الأولي وجدنا:

$X_1=2$ وهي قيمة تقابل S_1 بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛

$X_2=4$ وهي قيمة تقابل S_2 بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛

$S_2=6$ وهي قيمة تقابل Y_2 بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛ بقية المتغيرات معدومة.

وإذا ما نظرنا على مستوى السطر الأخير للبرنامج الأولي، فإننا نجد أن:

S_1 تقابلها القيمة 24، وهي قيمة Y_1 في البرنامج الثنائي؛

S_3 تقابلها القيمة 3، وهي قيمة Y_3 في البرنامج الثنائي؛ بقية المتغيرات معدومة.

كما أن قيمة الدالة الإقتصادية متساوية في جدول الحل الأمثل للبرنامجين أي $W=Z=216$.

النتيجة:

هي أن جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن أيضا الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، وجدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن أيضا الحل الأمثل للبرنامج الأولي.