نلاحظ من جدول الحل الأمثل الثاني تحقق نفس قيمة (Z) في الجدول الحل الأمثل الأول مع تغير متغيرات الحل الأساسي التي أصبحت :

$$X_3 = 8 ; X_1 = X_2 = 0 ; S_1 = 12 ; S_2 = 16 ; S_3 = 0 ; Z = 8$$

IV- تمارين محلولة:

التمرين الأول: افترض أن لديك نموذج البرمجة التالي

المطلوب: 1. أوجد الحل الأمثل بطريقة (M) الكبرى؛ 2. أوجد الحل الأمثل بطريقة المرحلتين.	$Min(z)=80x_1+60x_2$ s/c $\begin{cases}18x_1+12x_2\geq180\\6x_1+9x_2\leq162\\5x_1+10x_2=110\end{cases}$ $x_1;x_2\geq0$

حل التمرين الأول:

1. طريقة (M) الكبرى:

أولاً: إيجاد الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $18x_1+12x_2-S_1+A_1=180$

القيد الثاني: $6x_1+9x_2+S_2=162$

القيد الثالث: $5x_1+10x_2+A_2=110$

معادلة دالة الهدف:

$$Min(z)=80x_1+60x_2+0S_1+MA_1+0S_2+MA_2$$

ثانياً: إيجاد جدول الحل الأساسي الأول:

T_1	C_J	80	60	0	M	0	M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X1}$
M	A_1	18	12	−1	1	0	0	180	10
0	S_2	6	9	0	0	1	0	162	27
M	A_2	5	10	0	0	0	1	110	22
Z_J		23M	22M	−M	M	0	M		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		80−23M	60−22M	M	0	0	0	Z=290M	

نختبر أمثلية الحل من خلال صف (ΔZ) في جدول الحل الأولي حيث نلاحظ وجود قيم سالبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التدنئة مشروط بأن تكون جميع ($\Delta Z \geq 0$)، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، العمود الأمثل الذي يعطي المتغير الذي سيدخل إلى الحل فهو المقابل لأكبر قيمة سالبة في (ΔZ) وفي حالة وجود (M) الكبرى في معاملات فإننا نقارن بين معاملات (M) وفي حالة عدم وجود (M) الكبرى في المعاملات نقارن مقارنة عادية بين الأعداد وفي هذه الحالة المتغير (X_1) هو الذي يدخل إلى الأساس، ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيغادر الحل سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز، وعليه نختار أقل نسبة موجب وهي (10) وبذلك فإن (A_1) هو المتغير الخارج من الحل الأساسي وصفه وهو الصف الإرتكاز، وأن الرقم (18) هو العنصر الإرتكاز. وهكذا يمكن إعداد الجدول الثاني:

T_2	C_J	80	60	0	M	0	M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X2}$
80	X_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	0	10	15
0	S_2	0	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1	0	102	$\frac{102}{5}$
M	A_2	0	$\frac{20}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{-5}{18}$	0	1	60	9
Z_J		80	$\left(\frac{160}{3}+\frac{20}{3}M\right)$	$\left(\frac{-40}{9}+\frac{5}{18}M\right)$	$\left(\frac{40}{9}-\frac{5}{18}M\right)$	0	M	Z=800+60M	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	$\left(\frac{20}{3}-\frac{20}{3}M\right)$	$\left(\frac{40}{9}-\frac{5}{18}M\right)$	$\left(\frac{-40}{9}+\frac{23}{18}M\right)$	0	0		

المتغيرة الداخلة للأساس هي (X_2)، أما المتغيرة الخارجة من الأساس (A_2) ويكون الجدول الثالث كالآتي:

T_3	C_J	80	60	0	M	0	M	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B
80	X_1	1	0	$\frac{-1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	4
0	S_2	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$	1	0	57
60	X_2	0	1	$\frac{1}{24}$	$\frac{-1}{24}$	0	1	9
Z_J		80	60	$\frac{-25}{6}$	$\frac{25}{6}$	0	M	Z=860
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	$\frac{25}{6}$	$\left(M - \frac{25}{6}\right)$	0	$(M-1)$	

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \geq 0$ ومنه الجدول الثالث هو جدول حال أمثل، ونتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 4 ; X_2 = 9 ; S_2 = 57 ; S_1 = S_3 = 0 ; Z = 860$$

2, طريقة المرحلتين:

المرحلة الأولى: لدينا دالة الهدف

$$Min(z) = A_1 + A_2$$

جدول الحل الأساسي الأول:

T_1	C_J	0	0	0	1	0	1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X1}$
1	A_1	18	12	−1	1	0	0	180	10
0	S_2	6	9	0	0	1	0	162	27
1	A_2	5	10	0	0	0	1	110	22
Z_J		23	22	−1	1	0	1	Z=290	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		−23	−22	1	0	0	0		

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_1) والخارجة من الأساس هي: (A_1)

T_3	C_J	80	60	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
80	X_1	1	0	$\frac{-1}{12}$	0	4
0	S_2	0	0	$\frac{1}{8}$	1	57
60	X_2	0	1	$\frac{1}{24}$	0	9
Z_J		80	60	$\frac{-25}{6}$	0	Z=860
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	$\frac{25}{6}$	0	

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \geq 0$ ومنه الجدول الثالث هو جدول حال أمثل، ونتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 4 ; X_2 = 9 ; S_2 = 57 ; S_1 = S_3 = 0 ; Z = 860$$

التمرين الثاني: افترض أن لديك نموذج البرمجة التالي

المطلوب: 1. أوجد الحل الأمثل بطريقة (M) الكبرى؛ 2. أوجد الحل الأمثل بطريقة المرحلتين.	$Max(z) = 2x_1 + 3x_2$ s/c $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ $x_1 ; x_2 \geq 0$

حل التمرين الثاني:

1. طريقة (M) الكبرى:

أولاً: إيجاد الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $4x_1 + 6x_2 + S_1 = 24$

القيد الثاني: $5x_1 + 4x_2 - S_2 + A_1 = 20$

القيد الثالث: $x_2 + A_2 = 2$

معادلة دالة الهدف:

$$Max(z) = 2x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1 - MA_2$$

ثانياً: إيجاد جدول الحل الأساسي الأول:

T_1	C_J	2	3	0	0	−M	−M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X_2}$
0	S_1	4	6	1	0	0	0	24	4
−M	A_1	5	4	0	−1	1	0	20	5
−M	A_2	0	1	0	0	0	1	2	2
Z_J		−5M	−5M	0	M	−M	−M		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		2+5M	3+5M	0	−M	0	0	Z=−22M	

نختبر أمثلية الحل من خلال صف (ΔZ) في جدول الحل الأولي حيث نلاحظ وجود قيم موجبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التعظيم مشروط بأن تكون جميع $(\Delta Z \leq 0)$، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، العمود الأمثل الذي يعطي المتغير الذي سيدخل إلى الحل فهو المقابل لأكبر قيمة موجبة في (ΔZ) وفي هذه الحالة المتغير (X_2) هو الذي يدخل إلى الأساس، ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيغادر الحل سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز، وعليه نختار أقل نسبة موجب وهي (2) وبذلك فإن (A_2) هو المتغير الخارج من الحل الأساسي وصفه وهو الصف الإرتكاز، وأن الرقم (1) هو العنصر الإرتكاز.

وهكذا يمكن إعداد الجدول الثاني:

T_2	C_J	2	3	0	0	−M	−M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X1}$
0	S_1	4	0	1	0	0	−6	12	3
−M	A_1	5	0	0	−1	1	−4	12	$\frac{12}{5}$
3	X_2	0	1	0	0	0	1	2	−
Z_J		−5M	3	0	M	−M	4M+3		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		2+5M	0	0	−M	0	−5M−3	Z=−12M+6	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_1) والخارجة من الأساس هي: (A_1)

T_3	C_J	2	3	0	0	$-M$	$-M$		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X1}$
0	S_1	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{-14}{5}$	$\frac{12}{5}$	3
2	X_1	1	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{12}{5}$	–
3	X_2	0	1	0	0	0	1	2	–
Z_J		2	3	0	$\frac{-2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{5}$	$z=\frac{54}{5}$	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	$\frac{2}{5}$	$-M-\frac{2}{5}$	$-M-\frac{7}{5}$		

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (S_2) والخارجة من الأساس هي: (S_1)

T_4	C_J	2	3	0	0	$-M$	$-M$	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B
0	S_2	0	0	$\frac{4}{5}$	1	-1	$\frac{-7}{2}$	3
2	X_1	1	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{-3}{2}$	3
3	X_2	0	1	0	0	0	1	2
Z_J		2	3	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$z=12$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-M$	$-M$	

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \leq 0$ ومنه الجدول الرابع هو جدول حال أمثل، ونتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 3; X_2 = 2; S_1 = 0; S_2 = 3; Z = 12$$

T_2	C_J	2	3	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
0	S_1	0	0	$\frac{4}{5}$	1	3
2	X_1	1	0	$\frac{1}{4}$	0	3
3	X_2	0	1	0	0	2
Z_J		2	3	$\frac{1}{2}$	0	$z = 12$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	$-\frac{1}{2}$	0	

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \leq 0$ ومنه الجدول الثاني من المرحلة الثانية هو جدول حال أمثل، ونتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 3;\ X_2 = 2;\ S_1 = 0;\ S_2 = 3;\ Z = 12$$

IV– تمارين مقترحة:

التمرين الأول: أوجد الصيغة النموذجية وجدول الحل الأساسي الأول للبرامج التالية

$1.Max(z) = 20x_1 + 15x_2$ s/c $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 8x_1 + 16x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \end{cases}$ $x_1; x_2 \geq 0$	$2.Min(z) = x_1 - x_2 - 3x_3$ s/c $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2 \\ 3x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$ $x_1; x_2; x_3 \geq 0$

التمرين الثاني: أوجد الحل الأمثل للمسائل التالية بالطريقة المبسطة (Méthode Simplexe)

$2.Max(z) = 16x_1 + 15x_2$ s/c $\begin{cases} 40x_1 + 31x_2 \leq 124 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 3 \end{cases}$ $x_1; x_2 \geq 0$	$1.Max(z) = 100x_1 + 60x_2$ s/c $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 108 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 96 \end{cases}$ $x_1; x_2 \geq 0$

4.بين أن منطقة الحل للنموذج التالي غير محدودة: $$\begin{aligned}&Max(z)=3x_1+x_2\\&s/c\\&\begin{cases}x_1+x_2\leq 2\\x_1\leq 3\end{cases}\\&x_1;x_2\geq 0\end{aligned}$$	$$\begin{aligned}&3.Max(z)=200x_1+370x_2\\&s/c\\&\begin{cases}x_1+2x_2\leq 300\\x_1+x_2\leq 190\\x_1\leq 110\\x_2\leq 130\end{cases}\\&x_1;x_2\geq 0\end{aligned}$$

التمرين الثالث: أوجد الحل الأمثل للمسائل التالية:

1. بطريقة M الكبرى ***BIG (M)***: $$\begin{aligned}&Min(z)=10x_1+30x_2\\&s/c\\&\begin{cases}3x_1+2x_2\leq 6\\6x_1+x_2\geq 6\\x_2\geq 2\end{cases}\\&x_1;x_2\geq 0\end{aligned}$$	2. بطريقة M الكبرى و **طريقة المرحلتين**: $$\begin{aligned}&Min(z)=4x_1+x_2\\&s/c\\&\begin{cases}x_1+2x_2\leq 4\\3x_1+x_2=3\\4x_1+3x_2\geq 6\end{cases}\\&x_1;x_2\geq 0\end{aligned}$$

التمرين الرابع: بين أن النموذج التالي لا يحتوي على حل أمثل بإستخدام طريقة المرحلتين:

$$\begin{aligned}&Max(z)=3x_1+2x_2\\&s/c\\&\begin{cases}5x_1+4x_2\leq 20\\7x_1+10x_2\geq 70\\8x_1+5x_2\geq 40\end{cases}\\&x_1;x_2\geq 0\end{aligned}$$