الفصل الخامس

نماذج النقل

تظهر مشكلات النقل في الحياة العملية بصورة متكررة، فكثيراً ما يرى المرء شاحنات لنقل البضائع تسير عبر طرق مختلفة من مواقع عديدية لإيصال هذه المادة الحيوية إلى المستهلك الذي يمكن أن يوجد في أماكن متعددة.

تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة حيث أن النماذج الرياضية المستخدمة في مشكلة النقل هي نماذج خطية والهدف من إستخدامها هو إيجاد أسلوب امثل لتوزيع الوحدات أو المنتوجات من عدة مصادر للعرض (معامل، موانئ، مراكز تسويقية) إلى عدة مواقع للطلب (مراكز استهلاكية) بأقل كلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت، ومشاكل النقل يمكن حلها باستخدام طريقة السمبليكس في البرمجة الخطية إلا أن هذه الطريقة تتطلب خطوات وجداول وعمليات حسابية كثيرة وهذا الأمر تم التغلب عليه من خلال تفريغ كافة مفردات (متغيرات) مشكلة النقل في جدول خاص يسمى جدول النقل وهذه المفردات.

لقد وضعت الصيغة الأولى لطريقة النقل من قبل العالم هيتشكوك (Hitchcok) في سنة 1941، ثم أضاف إليها العالم كوبمانز (Koopmans) بعد ذلك حتى وصلت إلى صيغتها المعروفة في إطار البرمجة الخطية بواسطة العالم دانتزج سنة 1953 .[1]

I- الإطار العام لمشكلة النقل:

تمثل الصيغة الجدولية لمشكلة النقل منطلق إيجاد حل أولي ممكن للوصول إلى الحل الأمثل (النهائي) المتمثل في تحقيق أقل كلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل، والصيغة الجدولية لمشكلة النقل عبارة عن مصفوفة عدد صفوفها (M) تمثل المصادر (مراكز التوزيع) وعدد أعمدتها (N) وتمثل مراكز الاستلام وهو يظهر كما يلي[2]:

[1]. محمد دباس الحميد، محمد العزاوي، مرجع سابق، ص 121.

[2]. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي: " **مدخل إلى بحوث العمليات**"، دار مجدلاوي، عمان، 2007. ص: 281.

المراكز / المصادر	N_1	N_2	ـ.ـ.ـ.ـ	N_n	العرض
M_1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}		C_{1n} x_{1n}	a_1
M_2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}		C_{2n} x_{2n}	a_2
⋮					
M_m	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}		C_{mn} x_{mn}	a_m
الطلب	b_1	b_2		b_n	$\sum a_i$ / $\sum b_j$

حيث أن:

$(N_1,N_2,\ldots,N_n)$: مواقع الطلب، $(M_1,M_2,\ldots,M_m)$: مصادر العرض؛

C_{ij}: كلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر i إلى الموقع j؛

x_{ij} : عدد الوحدات المنقولة من المصدر i إلى الموقع j؛

الفرضية الأساسية لحل نموذج النقل هو أن ما معروض في مصادر العرض أي مجموع المعروض يساوي مجموع الطلب في مواقع الطلب أي: $(\sum a_i = \sum b_j)$ وفي هذه الحالة يسمى نموذج النقل بنموذج النقل المتوازن.

II- حل مسألة النقل:

بعد أن يتم إعداد الصيغة الجدولية لمشكلة النقل فإن الخطوة اللاحقة هو إيجاد الحل الأساسي الأولي الممكن، وهناك ثلاث طرق تستخدم لهذا الغرض:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية؛
- الحل بطريقة أقل التكاليف؛
- طريقة فوجل.

وبعد التوصل إلى الحل الأساسي الأولي يجب تدقيق هذا الحل لمعرفة فيما إذا كان هذا الحل امثلاً أم لا، ويتم الاختبار بإحدى الطريقتين:

- طريقة الحجر المتنقل (التخطي) أو القفز على الصخور (المسار المتعرج)؛
- طريقة التوزيع المعدل.

II-1- إيجاد الحل الأساسي الأولي:

يراعى فيه تحقيق التوازن بين المطلوب والمتاح، كما يجب أن يكون عدد مجاهيل القاعدة في هذا الحل المبدئي بعدد الشروط الخطية، أي $(M+N-1)$ ويمكن إيجاد حل مبدئي بعدة طرائق وفقها:

II-1-1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الأساليب الرياضية، لحل مشاكل النقل إلا أنها لا تحقق في معظم الأحيان الحل الأمثل لمشكلة نقل معينة، ولتوضيح كيفية استخدام هذه الطريقة نورد المثال التالي:

مثال رقم (01): إحدى الشركات لها ثلاثة مخازن في مواقع مختلفة، كما أن لها ثلاث مراكز تسويقية، أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من السلع (بالدينار)، وحجم التخزين في كل مخزون والاحتياجات لكل مركز تسويقي مشار إليها في الجدول أدناه:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	العرض
A	31 300	21 100	42	400
B	20	21 800	30 200	1000
C	23	20	15 600	600
الطلب	300	900	800	2000 /2000

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة التوازن (مجموع العرض= مجموع الطلب) وهو شرط محقق أي: (2000=2000)، ننقل (300) وحدة من (A) إلى المركز (D_1) وبالتالي تلبية كافة احتياجات المركز (D_1) ويبقى في مخزن (A) 100 وحدة؛

ننقل (100) وحدة من (A) إلى المركز (D_2)، ولم يبقى في مخزن (A) أية وحدة وهناك (800) وحدة يمكن للمركز (D_2) استيعابهم ؛

ننقل (800) وحدة من مخزون (B) إلى المركز (D_2) وبالتالي تلبية كافة احتياجات (D_2) وبقي في مخزون (200) وحدة؛

ننقل (200) وحدة من مخزون (B) إلى المركز (D_3) وبالتالي لم يبق في مخزون (B) أية وحدة؛

ننقل (600) وحدة من مخزون (C) إلى المركز (D_3) وعليه أصبحت حاجة المركز (D_3) صفراً ولم يبقى في مخزون (C) أية وحدة.

بعد عمليات النقل السابقة نلاحظ أن الجدول في توازن وهذا يعني أن جدولة النقل قد اكتملت، ويجب أن يتحقق الشرط الآتي، وهو أن مجموع الخلايا المشغولة يساوي 5.

عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)− 1

= 3+3 − 1 = 5 وهو ينطبق على المصفوفة أعلاه.

لذلك فإن هذه المشكلة وما سبقها هن من مشاكل من نوع قابلة للحل الأمثل بدون أية إجراءات أضافية ويطلق على هذا النوع من مشاكل النقل التي يتحقق فيها الشرط المذكور وهو (عدد الخلايا المملوءة (المشغولة)=M+N−1)، بأنها مشاكل غير منحلة)، أما المشاكل التي لا يتحقق فيها الشرط أعلاه ستكون من نوع المشاكل المنحلة، وهنا لا يمكن إيجاد الحل الأمثل لهذا النوع الأخير من المشاكل إلا بعد إجراءات إضافية أخرى[1].

الكلفة الكلية للنقل يمكن حسابها كالآتي:

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 300(31) + 100(21) + 800(21) + 200(30) + 600(15) = 43200$$

II-1-2- الحل بطريقة أقل التكاليف:

تعتبر هذه الطريقة أفضل من الطريقة السابقة لأنها تأخذ بعين الاعتبار الأقل تكلفة، وحتى نحصل على الحل الأساسي الأولي الممكن بهذه الطريقة علينا في البداية أن نتأكد من أن جدول النقل في حالة توازن ثم نتبع الخطوات التالية[2]:

- نبدأ بتزويد المربع ذا التكلفة الأقل بأكبر ما يمكن من عدد الوحدات من المخزون المقابل لهذا المربع؛
- نتابع ملئ المربعات ذات التكلفة الأقل بالتتابع إلى أن نزود جميع مراكز التوزيع من المصادر المتوفرة؛
- نحسب التكلفة الإجمالية للمربعات المختلفة.

لتوضيح هذه الطريقة سنعمل على حل مشكلة النقل في المثال التالي:

1. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 158.
2. أكرم محمد عرفان المهتدي، مرجع سابق، ص 131.

مثال رقم (02): لتكن مسألة النقل التالية

المطلوب: أوجد الحل الأساسي الأول:

1. بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وحساب التكلفة الإجمالية؛
2. بطريقة أقل التكاليف وحساب التكلفة الإجمالية، وماذا تستنتج؟

السوق / المصنع	الشمالي	الجنوبي	الغربي	العرض
A	7	6	5	**400**
B	4	8	1	**500**
C	2	3	9	**300**
الطلب	**200**	**600**	**400**	**1200 / 1200**

حل المثال:

1. بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وحساب التكلفة الإجمالية؛

لدينا شرط مجموع الخلايا المشغولة يساوي (5) وهو محقق **عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)− 1** = **3+3 − 1 = 5** وهو ينطبق على المصفوفة المقابلة.

أما الكلفة الكلية للنقل يمكن حسابها كالآتي:

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 200\,(7) + 200\,(6) + 400\,(8) + 100\,(1) + 300\,(9) = 8600$$

السوق / المصنع	الشمالي	الجنوبي	الغربي	العرض
A	7 — 200	6 — 200	5	**400**
B	4	8 — 400	1 — 100	**500**
C	2	3	9 — 300	**300**
الطلب	**200**	**600**	**400**	**1200 / 1200**

2. بطريقة أقل التكاليف وحساب التكلفة الإجمالية؛

هنا نبدأ التوزيع من الخالية ذات **أقل كلفة نقل** وإعطائها الأولوية في تسديد وهي هنا (B الغربي) حيث كلفة نقل (1 وحدة نقدية) لـ طن الواحد، وترى أن احتياجات السوق الغربي 400 وحدة والمتاح في المصنع في هو 500 طن لذا سيتم نقل 400 وحدة وإشباع حاجة السوق بالكامل ثم نبحث في الجدول عن أقل كلفة حيث نجد (C الشمالي) هي ذات كلفة أقل من غيرها (2 وحدة نقدية)، لذا ستكون لها الأولية التالية

السوق / المصنع	الأسواق: الشمالي	الجنوبي	الغربي	العرض
A	7	6 / 400	5	400
B	4	8 / 100	1 / 400	500
C	2 / 200	3 / 100	9	300
الطلب	200	600	400	1200 / 1200

بالتوزيع وترى أن احتياجات السوق 200 طن في حين أن المتاح في المصنع (C) هو 300 طن وبهذا يمكن إشباع حاجة السوق بالكامل ثم نرتقي في التكاليف وبنفس الطريقة نواصل الحل.

لدينا شرط مجموع الخلايا المشغولة يساوي(5)، وهو محقق **عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)− 1 = 3+3 − 1 = 5** وهو ينطبق على المصفوفة المقابلة.

أما الكلفة الكلية للنقل يمكن حسابها كالآتي:

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 400\,(6) + 100\,(8) + 400\,(1) + 200\,(2) + 100\,(3) = 4300$$

ونرى أن هناك فرقاً كبيراً في الكلفة الكلية التي تم احتسابها عند اعتماد طريقة الزاوية الشمالية الغربية والتي بلغت 8600 وحدة نقدية وهذا راجع إلى أن طريقة اقل كلفة هدفها هو التوزيع على أساس أدنى تكلفة نقل من المصانع إلى الأسواق.

ملاحظة هامة:

1. **في حالة تساوي التكاليف تعطى الأولوية للمربع الذي يحمل أكبر كمية ولأنه يعمل على تخفيض الكلفة الكلية أكثر؛**
2. **تعتبر طريقة أقل التكاليف أكفأ من طريقة الزاوية الشمالية الغربية التي لا تعتمد على أساس علمي في اختيار المتغيرات الأساسية،بينما هذه الطريقة تعتمد في اختيار المتغيرات الأساسية على المتغير الأقل من حيث التكلفة، لهذا تقربنا أكثر إلى الحل الأمثل، على عكس طريقة الزاوية الشمالية الغربية.[1]**

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مرجع سابق، ص: 289.

II-1-3- طريقة فوجل:

تعد هذه الطريقة من أفضل الطرق في حل مسائل النقل وغالبا ما تعطى حلاً أمثلا ويمكن أن نجمل خطوات حل مسألة النقل وفقها كالآتي[1]:

1. إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل صف؛
2. إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل عمود؛
3. تحديد أكبر فرق سواء كان في الصفوف أو الأعمدة؛
4. البحث عن أقل كلفة في الصف أو العمود الذي يقابل أكبر فرق والبدء بتخصيص الكميات التي سترسل إلى الأسواق؛
5. إعادة الخطوات السابقة لحين الوصول إلى توزيع كامل للطاقات الإنتاجية وإشباع تام لإحتياجات الأسواق مع مراعاة استبعاد الخلايا التي تشغل.

مثال رقم (03): لتكن مسألة النقل التالية:

السوق / المصنع	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	20	22	17	4	**120**
S_2	24	37	9	7	**70**
S_3	32	37	20	15	**50**
الطلب	**60**	**40**	**30**	**110**	**240/240**

المطلوب: حل المسألة بطريقة فوجل.

الحل: إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود، والبدء بتخصيص الكميات التي سترسل إلى الأسواق:

---

[1]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص 219.

المصنع \ السوق	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض	الفروق للصفوف
S_1	20	22 **40**	17	4	**120**	(17-4)= **13**
S_2	24	37	9	7	**70**	(9-7)= **2**
S_3	32	37	20	15	**50**	(20-15)= **5**
الطلب	**60**	**40**	**30**	**110**	**240/240**	
الفروق للأعمدة	(24-20)=**4**	(37-22)=**15**	(17-9)=**8**	(7-4)=**3**		

وهنا سوف يحذف العمود الثاني مرحليا وننقص العرض في الصف بنفس الوحدات المخصصة للخلية (40).

المصنع \ السوق	D_1	D_3	D_4	العرض	الفروق للصفوف
S_1	20	17	**4** **80**	**80**	(17-4)= **13**
S_2	24	9	7	**70**	(9-7)= **2**
S_3	32	20	15	**50**	(20-15)= **5**
الطلب	**60**	**30**	**110**	**200 /200**	
الفروق للأعمدة	(24-20)=**4**	(17-9)=**8**	(7-4)=**3**		

وهنا سوف يتم حذف الصف الأول مرحليا وننقص الطلب في العمود الرابع بنفس الوحدات المخصصة للخلية (80).

السوق / المصنع	D_1	D_3	D_4	العرض	الفروق للصفوف
S_2	24	9: 30	7	70	(9-7)= **2**
S_3	32	20	15	50	(20-15)= **5**
الطلب	60	30	30	120 /120	
الفروق للأعمدة	(24-32)=**8**	(20-9)=**11**	(15-7)=**8**		

وهنا سوف يتم حذف العمود الثالث مرحليا وننقص العرض في الصف الثاني بنفس الوحدات المخصصة للخلية (30).

السوق / المصنع	D_1	D_4	العرض	الفروق للصفوف
S_2	24: 10	7: 30	40	(24-7)= **17**
S_3	32: 50	15	50	(32-15)= **17**
الطلب	60	30	90 /90	
الفروق للأعمدة	(24-32)=**8**	(15-7)=**8**		

وهنا سوف يتم العودة إلى الجدول الأصلي لمشكلة النقل:

السوق / المصنع	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	20:	22: 40	17:	4: 80	120
S_2	24: 10	37:	9: 30	7: 30	70
S_3	32: 50	37:	20:	15:	50
الطلب	60	40	30	110	240/240

حساب التكلفة الإجمالية وفقا لهذه الطريقة:

$$Z=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3}c_{ij}x_{ij}=10(24)+50(32)+40(22)+30(9)+30(7)=3520$$

وشرط عدد الخلايا المملوءة محق، أي: 6=1−4+3.

II-2- إيجاد الحل الأمثل (اختبار الحل الأساسي الأولي):

لا نحصل من خلال استخدام الطرق الثلاثة السابقة الذكر إلا على الحل الأساسي الأولي، وإن الحصول على الحل الأساسي الأولي لا يعني نهاية حل المشكلة (الحل الأمثل)، وإنما يجب أن نستخدم أساليب آخري لاختبار هل أن الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه من تطبيق أحدى الطرق السابقة، هل هو الحل الأمثل أما هناك حلولاً أخرى أمثل منه، وللوصول إلى هكذا حلول هناك طريقتان لاختبار أمثلية الحل نبدأ بالتالية:

II-2-1- طريقة الحجر المتنقل:

تقوم طريقة الحجر المتنقل بتقييم جميع الخلايا الغير مشغولة (الفارغة) في جدول النقل للتأكد إذا كان النقل إليها يؤدي إلى تخفيض التكاليف، فإذا وجدنا أن ملء خلية غير مشغولة يؤدي إلى خفض تكاليف النقل فإن جدول النقل الأولي يتم تعديله للاستفادة من ذلك، وهكذا تستمر عملية تقييم كل جدول نقل إلى أن يتضح أن شغل أي خلية فارغة لن يؤدي إلى تخفيض تكاليف النقل بل سيؤدي إلى زيادتها[1].

يجب أولاً التأكد أن عدد الخلايا المشغولة يساوي (M+N−1) ولتطبيق هذه الطريقة يتم إتباع الخطوات الآتية[2]:

- تكوين ممرات مغلقة على شكل مربعات أو مستطيلات أو جمع الاثنين معاً على أن يكون المربع الفارغ محدد بثلاث زوايا لمربعات مملوءة؛
- وضع إشارة (+) في المربع الذي تنقل إليه الوحدات وإشارة (−) في المربع الذي تنقل منه الوحدات اعتماداً على الكلفة في المربعات؛
- مراعاة حصول التوازن في كميات العرض والطلب القائمة في الجدول على مستوى الصفوف وكذلك الأعمدة، ولذلك في كل صف أو عمود تكون إشارة سالبة لابد أن تكون إشارة موجبة؛
- يتم النقل لأقل كمية من مربع يحمل إشارة سالبة بين المربعات التي تحمل إشارات سالبة إلى المربعات ذات الإشارة الموجبة؛
- تعطى الأولوية للممر المغلق الحاصل على أعلى قيمة سالبة من بين الممرات الأخرى؛

---

[1] . منعم زمزير المساوي:" **بحوث العمليات مدخل علمي لإتخاذ القرارات**"، دار وائل للنشر، ط1،الأردن، 2009، ص 200.

[2]. عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، مرجع سابق، ص ص : 101−102 .

- يتم الوصول إلى الحل الأمثل في حالة عدم وجود إشارات سالبة مما يعزز الاعتقاد بأن الفرصة لتخفيض التكاليف قد انتهت، أي أن القيم تكون هنا أما موجبة أو معدومة واليك كيفية إجراء حجر التنقل.

مثال رقم (04): اختبر الحل الأولي لمسألة النقل التالية علماً أن الحل الأولي تم التوصل إليه بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

لدينا الكلفة الإجمالية لنقل هي:

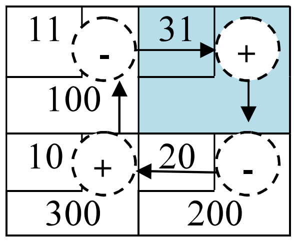
$$Z=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij}=21(100)+11(100)+10(300)+20(200)+6(300)=12000$$

نتأكد من عدد المربعات المملوءة:

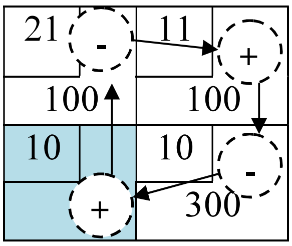
5=3+3−1 ومنه الشرط محقق.

ولأن بعد أن تم حل المسألة نحاول إجراء الاختبار بطريقة الحجر المتنقل للخلايا الأربعة الفارغة لمعرفة ما الذي سيحدث للكلفة الكلية في حال تغير المسار.

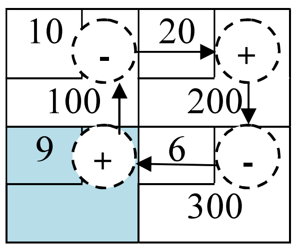
من \ إلى	D_1	D_2	D_3	العرض
A	21 / **100**	11 / **100**	31 /	**200**
B	10 /	10 / **300**	20 / **200**	**500**
C	13 /	9 /	6 / **300**	**300**
الطلب	**100**	**400**	**500**	**/1000 1000**



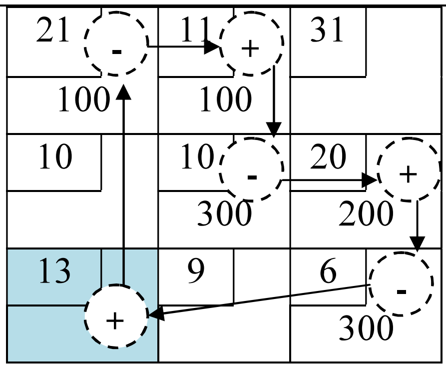
$\overline{C}_{13}=C_{13}-C_{23}+C_{22}-C_{12}=$
$31-20+10-11=10$



$\overline{C}_{21}=C_{21}-C_{11}+C_{12}-C_{22}=$
$10-21+11-10=-10$



$\overline{C}_{32}=C_{32}-C_{22}+C_{23}-C_{33}=$
$9-10+20-6=13$



$\overline{C}_{31}=C_{31}-C_{11}+C_{12}-C_{22}+C_{23}-C_{33}=$
$13-21+11-10+20-6=7$

بما أن المسار الثاني سالب نقوم بنقل أقل كمية في المربع السالب وهي (100) ونشكل من جديد مسألة النقل التالية:

لدينا الكلفة الإجمالية لنقل بعد تعديل مسألة النقل كما يلي:

$$Z=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}c_{ij}x_{ij}=10(100)+11(200)+10(200)+20(200)+6(300)=11000$$

وهي أقل من الكلفة السابقة (12000) ونعاود إختبار الحل هل هو أمثل؟

21	11 **200**	31
10 100	10 **200**	20 **200**
13	9	6 **300**

21 +	11 - 200
10 - 100	10 + 200

$$\overline{C}_{11}=C_{11}-C_{12}+C_{22}-C_{21}=21-11+10-10=10$$

11 - 200	31 +
10 + 200	20 - 200

$$\overline{C}_{13}=C_{13}-C_{23}+C_{22}-C_{12}=31-20+10-10=10$$

10 - **200**	20 + 200
9 +	6 - **300**

$$\overline{C}_{32}=C_{32}-C_{22}+C_{23}-C_{33}=9-10+20-6=13$$

10 - 100	10 200	20 + 200
13 +	9	6 - 300

$$\overline{C}_{31}=C_{31}-C_{21}+C_{23}-C_{33}=13-10+20-6=17$$

ومنه **لا توجد قيمة سالبة إذن لا يمكن تطوير** الحل ومنه الحل الأمثل هو: (Z=11000) **وهي خطة مثلى.**

II-2-2- طريقة التوزيع المعدل:

تعتبر هذه الطريقة أسهل وأسرع من طريقة الحجر المتنقل، إذا لا تطلب رسم جميع المسارات المتعرجة مما يقلل من الجهد والوقت، ويمكن تلخيص خطوات الطريقة بالأتي[1]:

- تأكد من أن الحل الأولي ليس متحللاً وذلك يجب أن تكون عدد الخلايا المشغولة تساوي (M+N−1)؛

[1] فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي، مرجع سابق، ص ص: 147-148 .