III- حالات خاصة عند حل مشاكل النقل:

قد تحصل بعض الحالات، عند حل مشكلة النقل، التي تحتاج إلى اتخاذ إجراء معين لمواصلة الحل وهي حالات ترتبط بالواقع الفعلي لمؤسسة الأعمال وطبيعة الأسواق ولعل أهم هذه الحالات الآتي:

III- 1- عدم تساوي العرض والطلب:

في الحياة العملية كثيراً ما يحصل عدم توازن بين الطاقة الإنتاجية المتاحة لدى المصانع واحتياجات الأسواق لذا لا بد من موازنة العرض مع الطلب لحل المسألة، هنا نلجأ إلى إضافة عمود وهمي عندما يكون العرض أكبر من الطلب أي إيجاد سوق وهمية، وتكون كلفة النقل من المصانع إلى السوق الوهمي (0) وبالعكس يضاف مصنع وهمي (صف وهمي)، والكمية التي تقابل العمود أو الصف الوهمي تساوي الفرق بين مجموع كمية العرض وكمية الطلب.

مثال رقم (06):

1. حل مسألة النقل التالي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

	D_1	D_2	D_3	العرض
A	2	1	2	20
B	1	2	3	9
C	4	2	1	11
الطلب	10	8	15	

2. حل مسألة النقل التالي بطريقة أقل التكاليف:

	D_1	D_2	D_3	العرض
A	8	7	2	100
B	4	9	10	75
C	1	2	8	25
D	5	6	11	125
الطلب	150	125	130	

الحل:

1. طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

المشكلة غير متوازنة لأن العرض لا يساوي الطلب:

العرض= 11+9+20 = 40 ، الطلب = 15+8+10 = 33

لذا نحتاج إلى مركز وهمي تستوعب الفارق من الوحدات بين مجموع العرض و مجموع الطلب أي 7 وحدات، لذا نضيف عمود وهمي على جدول الكلفة السابق وبتكلفة مساوية إلى صفر مقابل كل مصدر كما يلي:

من \ إلى	D_1	D_2	D_3	مركز وهمي	العرض
A	2 **10**	1 **8**	2 2	0	20
B	1	2	3 **9**	0	9
C	4	2	1 **4**	0 **7**	11
الطلب	**10**	**8**	**15**	**7**	**40 /40**

والكلفة الكلية هي:

$$Z = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} c_{ij} x_{ij} = 10(2) + 1(8) + 2(2) + 3(9) + 1(4) + 0(7) = 63$$

2. طريقة اقل تكاليف: شكل مسألة النقل غير متوازنة:

العرض= 100+75+25+125 = 325 ، الطلب = 150+125+130= 405

لذا نحتاج إلى إضافة صف وهمي مصدر وهمي وبتكلفة مساوية إلى صفر مقابل كل مركز طلب أما مقدار العرض فيه يساوي 80 .

من \ إلى	D_1	D_2	D_3	العرض
A	8	7	2 100	100
B	4 45	9	10 **30**	75
C	1 25	2	8	25
D	5	6 125	11	125
مصدر وهمي	0 **80**	0	**0**	80
الطلب	**150**	**125**	**130**	**405 /405**

المطلوب: مساعدة الشركة الناقلة بإعداد خطة النقل.

هنا يبدأ الحل بالبحث عن أكبر رقم في الجدول وهو (12) ونبدأ بالتخصيص له، ثم الأكبر وهو 11 وهكذا، إن الربح الكلي سيكون.

الفروع / المخازن	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	العرض
A	6	8 **400**	3	10 **100**	500
B	9	2	7	11 **700**	700
C	12 **200**	5	4 **100**	10	300
الطلب	**200**	**400**	**100**	**800**	**/1500 1500**

$$Z=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3}c_{ij}x_{ij}=12(200)+8(400)+4(100)+10(100)+11(700)=14700$$

III-3 – وجود أكثر من حل أمثل:

قد توجد في بعض مشاكل النقل عند حلها إمكانية لعدة حلول مثلى وليس حلاً واحداً، وهذا الأمر يمكن اكتشافه عندما تكون نتائج تقييم الخلايا غير المشغولة (مؤشرات التحسين) فيها واحد أو أكثر ذات قيمة صفري، هذا يعني أنه يمكن أن تغير اتجاهات بعض الشحنات إلى اتجاهات أخرى بنفس الكلفة الكلية، إن وجود حلول مثلى متعددة يعطي الإدارة مرونة أكبر في اختيار وتوزيع المواد.

III- 4 – حالة الانحلال:

تحصل هذه الحالة عندما يكون عدد الخلايا المشغولة أقل من مجموع عدد الصفوف والأعمدة أو (M+N−1) كما أشرنا سابقا، وقد تحصل هذه الحالة أثناء الحل الأولي (قبل الاختبار) ولمعالجة هذه الحالة فإنه يتم إشغال إحدى الخلايا (يجب أن يتم اختيارها بدقة والتي تحتوي على أقل كلفة) بقية صفرية ومعاملتها وكأنها خلية مشغولة والاستمرار بالحل.

مثال رقم (08): هنا لو افترضنا أن إحدى الشركات تريد إعداد خطة نقل وستعتمد طريقة الشمالية الغربية كما في الجدول التالي:

إن عدد الخلايا المشغولة هنا هو 4 في حين أنه يجب أن يكون (3+3−1=5) لذا فإن الحل يعتبر متحللاً، وهنا لا بد من وضع قيمة صفرية في إحدى الخلايا الفارغة للتمكن من اختبار الحل مثلا يمكنك وضع صفر في الخلية (A_2) ومعاملتها وكأنها خلية مشغولة والاستمرار باختيار الحل.

الفروع / المخازن	الأول	الثاني	الثالث	العرض
A	8 / 100	2 / **0**	6	100
B	10	9 / 100	9 / 20	120
C	7	10	7 / 80	80
الطلب	**100**	**100**	**100**	**300/ 300**

IV – صياغة مشكلة النقل بشكل مسألة برمجة خطية:

من الواضح أن مشاكل النقل هي أحدى أشكال البرمجة الخطية التي تم التطرق إليها سابقا، وذلك لأن معاملات المتغيرات جميعها في القيود تساوي الواحد، ولكي توضع ضمن إطار النموذج الرياضي لمشكلة يستوجب معرفة الحالة التي هي عليها:

- ففي حالة المشكلة المعروضة متوازنة أي العرض يساوي الطلب نضع إشارة المساواة في القيود؛
- وفي حالة زيادة الطلب على العرض فإننا نضع إشارة المساواة بالنسبة للصفوف وإشارة أقل من أو يساوي للأعمدة؛
- أما إذا زاد العرض على الطلب، فإننا نضع إشارة المساواة للأعمدة وإشارة أصغر من أو يساوي للصفوف.

مثال رقم (09): البيانات التالية تخص إحدى الشركات المتخصصة بإنتاج المواد الغذائية في مصنعين وتقوم بتوزيع منتوجاتها في ثلاث أسواق كما هو موضح في الجدول التالي:

المطلوب: صياغة مشكلة النقل بشكل مسألة برمجة خطية.

الحل: نفترض أن عدد الأطنان التي تشحن من المصنع A إلى السوق الأول هي X_{A1}.

نفترض أن عدد الأطنان التي تشحن من المصنع B إلى السوق الأول هي X_{B1}، وهكذا تتم عملية تعريف المتغيرات.

الأسواق / المصانع	الأول	الثاني	الثالث	العرض
A	2	3	5	20000
B	3	1	4	15000
الطلب	**10000**	**8000**	**15000**	**35000/ 33000**

ومنه شكل مسألة البرمجة الخطية هي على الشكل التالي:

$$Min\,(Z) = 2X_{A1} + 3X_{A2} + 5X_{A3} + 3X_{B1} + X_{B2} + 4X_{B3}$$

$$S/C$$

$$\begin{cases} X_{A1} + X_{B1} = 10000 \\ X_{A2} + X_{B2} = 8000 \\ X_{A3} + X_{B3} = 15000 \\ X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} \leq 20000 \\ X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} \leq 15000 \end{cases}$$

$$X_{AJ} \geq 0; X_{BJ} \geq 0$$

V- تمارين محلولة:

التمرين الأول:

مكتب مقاولات يقوم بإنجاز ثلاث مشاريع، كل مشروع من المشاريع الثلاث يحتاج إلى (20; 30; 15) ألف طن من الأسمنت على التوالي، تجهز المشاريع الثلاث بالإسمنت من ثلاث مخازن سعة الخزن لكل مخزون هي (25; 20; 20) ألف طن على التوالي، كلفة نقل كل ألف طن من المخزن الأول إلى المشاريع الثلاثة هي (2; 3; 2) مليون دينار على التوالي ومن المحزن الثاني إلى المشاريع الثلاثة (4; 5; 3) مليون دينار على التوالي ومن المخزن الثالث إلى المشاريع الثلاثة (4; 2; 4) مليون دينار على التوالي.

المطلوب:

1. تكوين جدول النقل للمسألة؛
2. أوجد الحل الأساسي الأولي:
   - بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وحساب التكلفة الإجمالية ؛
   - بطريقة أقل التكاليف وحساب التكلفة الإجمالية؛
   - بطريقة فوجل وحساب التكلفة الإجمالية.
3. أوجد الحل الأمثل(بالاعتماد على الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية):
   - بطريقة الحجر المتنقل وحساب التكلفة الإجمالية؛
   - بطريقة التوزيع المعدل وحساب التكلفة الإجمالية.

حل التمرين الأول:1. تكوين جدول النقل للمسألة:

الفروع / المخازن	الأول	الثاني	الثالث	العرض
A	2	3	2	20
B	3	5	4	20
C	4	2	4	25
الطلب	**15**	**30**	**20**	**65 /65**

1.2 الحل الأساسي الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وحساب التكلفة الإجمالية:

شرط مجموع الخلايا المشغولة يساوي(5)، وهو محقق عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)- 1 = 3+3 – 1 = 5

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 2(15) + 3(5) + 5(20) + 2(5) + 4(20) = 235$$

الفروع / المخازن	الأول	الثاني	الثالث	العرض
A	2 / 15	3 / **5**	2	20
B	3	5 / 20	4	20
C	4	2 / **5**	4 / 20	25
الطلب	**15**	**30**	**20**	**65 /65**

2.2 الحل الأساسي الأولي أقل التكاليف وحساب التكلفة الإجمالية:

شرط مجموع الخلايا المشغولة يساوي(5)، وهو محقق عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)- 1 = 3+3 – 1 = 5

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 2(15) + 2(5) + 5(5) + 4(15) + 2(25) = 175$$

الفروع / المخازن	الأول	الثاني	الثالث	العرض
A	2 / 15	3	2 / 5	20
B	3	5 / 5	4 / 15	20
C	4	2 / **25**	4	25
الطلب	**15**	**30**	**20**	**65 /65**

3.2 الحل الأساسي الأولي بطريقة فوجل وحساب التكلفة الإجمالية:

إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود، والبدء بتخصيص الكميات التي سترسل إلى المشاريع.

وهنا سوف يحذف الصف الثالث مرحليا وننقص الطلب في العمود بنفس الوحدات المخصصة للخلية (25).

المخازن \ الفروع	الأول	الثاني	الثالث	العرض	الفروق للصفوف
A	2	3	2	20	(2-2)= **0**
B	3	5	4	20	(4-3)= **1**
C	4	2 **25**	4	25	(4-2)= **2**
الطلب	**15**	**30**	**20**	**65 /65**	
الفروق للأعمدة	(3-2)= **1**	(3-2)= **1**	(4-2)= **2**		

وهنا سوف يحذف العمود الثاني مرحليا وننقص العرض في الصف بنفس الوحدات المخصصة للخلية (5).

المخازن \ الفروع	الأول	الثاني	الثالث	العرض	الفروق للصفوف
A	2	3 **5**	2	20	(2-2)= **0**
B	3	5	4	20	(4-3)= **1**
الطلب	**15**	**5**	**20**	**40 /40**	
الفروق للأعمدة	(3-2)= **1**	(5-3)= **2**	(4-2)= **2**		

وهنا سوف يحذف الصف الأول مرحليا وننقص الطلب في العمود بنفس الوحدات المخصصة للخلية (15).

المخازن \ الفروع	الأول	الثالث	العرض
B	3 / 15	4 / 5	20
الطلب	**15**	**5**	**20 /20**

المخازن \ الفروع	الأول	الثالث	العرض	الفروق للصفوف
A	2	2 / 15	15	(2-2)= **0**
B	3	4	20	(4-3)= **1**
الطلب	**15**	**20**	**35 /35**	
الفروق للأعمدة	(3-2)= **1**	(4-2)= **2**		

والحل الأساسي لمسألة النقل موضح بالجدول التالي:

المخازن \ الفروع	الأول	الثاني	الثالث	العرض
A	2	3 / **5**	2 / 15	20
B	3 / 15	5	4 / 5	20
C	4	2 / **25**	4	25
الطلب	**15**	**30**	**20**	**65 /65**

شرط مجموع الخلايا المشغولة يساوي(5)، وهو محقق عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)− 1 = 3+3 − 1 = 5

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 3(15)+3(5)$$
$$+2(25)+2(15)+4(5)=160$$

يلاحظ أن مجموع كلفة النقل وفق طريقة فوجل أقل من مجموع كلفة النقل وفق طريقتي الزاوية الشمالية الغربية وأقل التكاليف.

1.3 الحل الأمثل بطريقة الحجر المتنقل وحساب التكلفة الإجمالية (بالإعتماد على الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية):

المسارات المغلقة للجدول الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية هي كالآتي:

المسار الأول للخلية (1; 3) هي : $\overline{C}_{13} = C_{13} - C_{33} + C_{32} - C_{12} = 2 - 4 + 2 - 3 = -3$

المسار الأول للخلية (2; 1) هي : $\overline{C}_{21} = C_{21} - C_{22} + C_{12} - C_{11} = 3 - 5 + 3 - 2 = -1$

المسار الأول للخلية (2; 3) هي : $\overline{C}_{23} = C_{23} - C_{22} + C_{32} - C_{33} = 4 - 5 + 2 - 5 = -3$

المسار الأول للخلية (3; 1) هي : $\overline{C}_{31} = C_{31} - C_{32} + C_{12} - C_{11} = 4 - 2 + 3 - 2 = 3$

القيمة الأكثر سالبية هي المتغيرين (X_{13} ، X_{23}) لذلك يتم اختيار احدهما وليكن X_{13} . وننقل أقل كمية من المربع السالب (20; 5) وكمية هي (5) .

اختبار الخانات الفارغة من مسألة المقابلة:

$\overline{C}_{12} = C_{12} - C_{13} + C_{33} - C_{32} =$
$3 - 2 + 4 - 2 = 3$

$\overline{C}_{21} = C_{21} - C_{11} + C_{13} - C_{33} + C_{32} - C_{22} =$
$3 - 2 + 2 - 4 + 2 - 5 = -4$

$\overline{C}_{23} = C_{23} - C_{22} + C_{32} - C_{33} =$
$4 - 5 + 2 - 4 = -3$

$\overline{C}_{31} = C_{31} - C_{33} + C_{13} - C_{11} =$
$4 - 4 + 2 - 2 = 0$

معامل (X_{21}) هو الأكثر سالبية لذلك يمثل المتغير الداخل وكمية التي تنقل هي الأقل ما بين (20; 15; 15) وهي (15) .

الفروع / المخازن	الأول	الثاني	الثالث	العرض
A	2 / 15	3	2 / 5	20
B	3	5 / 20	4	20
C	4	2 / **10**	4 / 15	25
الطلب	**15**	**30**	**20**	**65 /65**

نلاحظ من خلال الجدول المقابل أن عدد المتغيرات الخلايا المملوءة اقل من (M+N−1) وهذا لا يسمح لنا بتكوين مسارات مغلقة وهي حالة خاصة **(حالة الانحلال)**، لذلك نخصص القيمة (0) للخلايا الفارغة والأقل كلفة وهي (X_{11})، وعلى هذا الأساس فإن المسارات المغلقة للجدول هي كالآتي:

اختبار الخانات الفارغة من مسألة المقابلة:

$\overline{C}_{12} = C_{12} - C_{11} + C_{21} - C_{22} =$
$3 - 2 + 3 - 5 = -1$

$\overline{C}_{23} = C_{23} - C_{13} + C_{11} - C_{12} =$
$4 - 2 + 2 - 3 = 1$

$\overline{C}_{31} = C_{31} - C_{32} + C_{22} - C_{21} =$
$4 - 2 + 5 - 3 = 4$

الفروع / المخازن	الأول	الثاني	الثالث	العرض
A	2 / 0	3	2 / 20	20
B	3 / 15	5 / 5	4	20
C	4	2 / **25**	4	25
الطلب	**15**	**30**	**20**	**65 /65**

$\overline{C}_{33} = C_{33} - C_{32} + C_{22} - C_{21} +$
$C_{11} - C_{13} = 4 - 2 + 5 - 3 + 2 - 2 = 4$

معامل (X_{12}) هو الأكثر سالبية لذلك يمثل المتغير الداخل وكمية التي تنقل هي الأقل ما بين (5; 0) وهي (0).

اختبار الخانات الفارغة من مسألة المقابلة:

$\overline{C}_{11} = C_{11} - C_{12} + C_{22} - C_{21} =$
$2 - 3 + 5 - 3 = 1$

$\overline{C}_{23} = C_{23} - C_{13} + C_{12} - C_{22} =$
$4 - 2 + 3 - 5 = 0$

$\overline{C}_{31} = C_{31} - C_{32} + C_{22} - C_{21} =$
$4 - 2 + 5 - 3 = 4$

$\overline{C}_{33} = C_{33} - C_{13} + C_{12} - C_{32} =$
$4 - 2 + 3 - 2 = 3$

بما أن معاملات الكلف النسبية غير سالبة فهذا يعني أن الجدول المقابل يمثل حل الأمثل لمسألة النقل بمجموع كلفة:

المخازن \ الفروع	الأول	الثاني	الثالث	العرض
A	2	3 0	2 20	20
B	3 15	5 5	4	20
C	4	2 25	4	25
الطلب	**15**	**30**	**20**	**65 /65**

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 3(0) + 2(20) + 3(15) + 5(5) + 2(25) = 160$$

تدل القيمة الصفرية لمعامل الكلفة النسبية للمتغير (X_{23}) على وجود حل أمثل أخر للمسألة وهي حالة خاصة **(وجود أكثر من حل أمثل)** بحيث نواصل الحل ونختار كمية أقل في المربع السالب ما بين (5; 20) وهي (5) ونقوم بتطوير الحل كما هو موضح في الجدول المقابل. ومجموع كلفة النقل هي:

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 3(15) + 3(5) + 2(25) + 2(15) + 4(5) = 160$$

المخازن \ الفروع	الأول	الثاني	الثالث	العرض
A	2	3 5	2 15	20
B	3 15	5	4 5	20
C	4	2 25	4	25
الطلب	**15**	**30**	**20**	**65 /65**

2.3 إيجاد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدل وحساب التكلفة الإجمالية (بالاعتماد على الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية):

- استخراج تكاليف المربعات المملوءة:

نفرض: $U_1 = 0$ و لدينا: $C_{ij} = U_i + V_j$

الخلية (1; 1):

$$C_{11} = U_1 + V_1 \Rightarrow U_1 + V_1 = 2 \Rightarrow V_1 = 2$$

الخلية (1; 2):

$$C_{12} = U_1 + V_2 \Rightarrow U_1 + V_2 = 3 \Rightarrow V_2 = 3$$

VI- تمارين مقترحة:

التمرين الأول: لتكن مسألة النقل التالية :

الأسواق / المخازن	D_1	D_2	العرض
S_1	4	2	60
S_2	7	5	40
S_3	3	10	70
الطلب	105	65	170 / 170

المطلوب: أوجد الحل الأساسي الأول:

1. بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وحساب التكلفة الإجمالية .
2. بطريقة أقل التكاليف وحساب التكلفة الإجمالية.
3. بطريقة فوجل وحساب التكلفة الإجمالية.

التمرين الثاني: لتكن مسألة النقل التالية:

الأسواق / المصنع	الشمالي	الجنوبي	الغربي	الطاقة الإنتاجية (طن) العرض
A	7	6	5	400
B	4	8	1	500
C	2	3	9	300
الاحتياجات (طن) الطلب	200	600	400	1200 /1200

المطلوب: أوجد الحل الأساسي الأول بطريقة فوجل وحساب التكلفة الإجمالية.

التمرين الثالث: من مسألة النقل للتمرين الأول، وإنطلاقا من جدول الحل الأساسي الأول المحصل عليه من مصفوفة الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية، أوجد الحل الأمثل:

1. بطريقة الحجر المتنقل وحساب التكلفة الإجمالية .
2. بطريقة التوزيع المعدل وحساب التكلفة الإجمالية .

التمرين الرابع : لتكن مسألة النقل التالية

المصنع \ السوق	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	4	7	2	10	**300**
S_2	5	8	7	11	**500**
S_3	10	9	6	13	**700**
الطلب	**400**	**200**	**600**	**400**	**1600 /1500**

المطلوب: أوجد الحل الأساسي الأول بطريقة أقل التكاليف وحساب التكلفة الإجمالية .

التمرين الخامس: لتكن مسألة النقل التالية :

المصنع \ الأسواق	الشمالي	الجنوبي	الغربي	الطاقة الإنتاجية (طن) العرض
A	8	2	6	**100**
B	10	9	9	**120**
C	7	10	7	**80**
الاحتياجات (طن) الطلب	**100**	**100**	**100**	**300 /300**

المطلوب:

1. أوجد الحل الأساسي الأول بطريقة الزاوية الشمالية الغربية . ماذا تلاحظ .
2. كيف يتم معالجة هذه الحالة ؟

التمرين السادس: لتكن مسألة النقل التالية

السوق / المصنع	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
A	10	8	6	4	**2000**
B	14	17	5	2	**1300**
C	18	7	11	9	**1700**
الطلب	**1000**	**2000**	**500**	**1500**	**5000**

المطلوب: أوجد أعلى إيراد ومن مبدأ تعظيم الأرباح :

1. الحل الأساسي الأول بطريقة الزاوية الشمالية الغربية و بطريقة أقل التكاليف وبطريقة فوجل وحساب مجموع الإيرادات لكل طريقة.

2. اختبر الحل الأساسي الأول بطريقة الحجر المتنقل وتوزيع المعدل من مصفوفة الحل الأساسي لطريقة اقل التكاليف وحساب مجموع الإيرادات لكل طريقة .