⑤ Beta distribution:-

Defn:- If a r.v. X has a density function given by:-

$$f(x) = \frac{1}{\beta(a,b)} \cdot x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} \quad ; \quad 0<x<1 \quad a,b>0$$

then X is defined to have a beta dist.

$$\Rightarrow \quad X \sim Beta(a,b)$$

Where:- $\beta(a,b) = \frac{\Gamma a \cdot \Gamma b}{\Gamma a+b} = \int_0^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} \cdot dx$

The moments are:-

① The mean $\mu_x = E(X) = \frac{a}{a+b}$

② The variane $\sigma_x^2 = V(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$

③ The m.g.f $M_X(t)$ is not exist.

Example:- For the p.d.f $f(x) = (1-x)^2 \cdot x^{\theta-1}$, $0<x<1$ Find the dist of x and $E(X)$.

Sol. $f(x) = (1-x)^2 \cdot x^{\theta-1}$; $0<x<1$

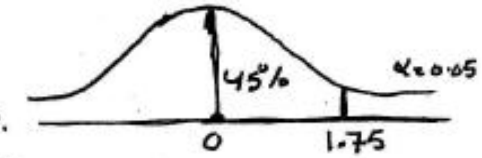
$$\Rightarrow (1-x)^2 = (1-x)^{b-1} \Longrightarrow b-1 = 2 \Rightarrow b = 3$$

$$x^{\theta-1} = x^{a-1} \Longrightarrow \theta-1 = a-1 \Rightarrow a = \theta$$

$$\therefore \quad X \sim Beta\,(\theta, 3)$$

$$E(X) = \frac{a}{a+b} = \frac{\theta}{\theta+3}$$

Examples:- ② Find $t_{(15,\ 0.05)}$ on one side about the mean
$\overset{k}{}\ \overset{\alpha}{}$



∴ من الجدول نقاطع هذين الرقمين نجد أنه يساوي (1.75) وبما أن المنحني متماثل حول الوسط يعني أن 50% من الطرفين على حدة أن 45% من هذه المساحة تقع ضمن المنطقة و 5% خارج المنطقة.

- If we want calculate t on both sides then:

$$t(k, \frac{\alpha}{2}) = t(15, 0.025) = \mp 2.13$$

Examples:- ③ If $t \sim T(6)$, Find $V(t)$, $p(t > 3.707)$?

sol/ $V(t) = \frac{k}{k-2} = \frac{6}{6-2} = \frac{6}{4} = 1.5$

$p(t > 3.707) = 0.005$.

Note جداول t :-

— لكل قيمة من قيم المعلمة v منحني خاص، لذلك تم وضع جدول بقيم محددة، لهذه المعلمة ومستوى دلالة معين من جدول يسمى جدول توزيع t أو (t-dist. table) وكالتالي:

① If the area at one side from the mean we take α.

② If the area at on both sides from the mean we take $\frac{\alpha}{2}$.

⑦ F-distribution:-

—— Is the dist. of the ratio of two Independent chi-sequare random variables (X_1, X_2). with parameters m, n [illegible]

[i.e: $X_1 \sim \chi^2_{(m)}$ and $X_2 \sim \chi^2_{(n)}$ and the ratio

$$F = \frac{X_1/m}{X_2/n} \quad \left(\text{or } F = \frac{\frac{X_1}{m}}{\frac{X_2}{n}}\right) \Big] .$$

Then:

$F \sim F(m,n)$ with p.d.f is:-

$$f(F) = L . \frac{F^{\frac{m-2}{2}}}{\left(1+\frac{m}{n}\cdot F\right)^{\frac{m+n}{2}}} \quad ; \quad F > 0$$

$$\text{where } L = \frac{\Gamma\frac{m+n}{2}}{\Gamma\frac{m}{2}\cdot\Gamma\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}$$

The properties:-

① The value of F alwayes positive.

② The mean is:- $E(F) = \frac{n}{n-2}$

③ The variance is:

$$V(F) = \frac{2n^2 \cdot (m+n-2)}{m(n-2)^2 \cdot (n-4)} .$$

④ The F-dist curve winding toward the right

هناك جداول خاصة لتوزيع F بدرجات
حرية (m,n) وتحت مستوى دلالة α.

Example. If $F \sim F(4,6)$;

then $E(F) = \frac{n}{n-2} = \frac{6}{6-2} = \frac{6}{4} = 1.5$

$V(F) = \frac{2(6)^2(4+6-2)}{4(6-2)^2(6-4)} = 4.5$

$P(F > 4.53) =$