

## المستوي الإسقاطي (Projective Plane)

سنكون مستويا إسقاطيا كمثال على نظام بديهي :

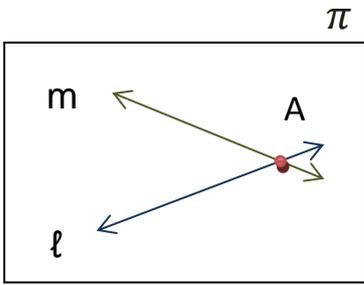
يتكون المستوى الإسقاطي  $\pi$  من مجموعة كلمات اولية تقنية [ نقاط ونرمز لها بحروف كبيرة  $A, B, C, \dots$  ومستقيمتان ونرمز لها بحروف صغيرة  $\ell, m, \dots$  ] و البديهيات كما يلي :

1. أي نقطتين مختلفتين في  $\pi$  يحتويهما مستقيم واحد فقط .
2. كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الأقل .
3. توجد في الأقل نقطة واحدة  $A$  ويوجد في الأقل خط واحد  $\ell$  بحيث ان  $A \notin \ell$  .
4. أي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة على الأقل .

**مبرهنة ( 1 ) :** أي مستقيمين مختلفين في المستوى الإسقاطي يشتركان في نقطة واحدة فقط .

المعطيات : ليكن  $\ell, m$  مستقيمين مختلفين في المستوى الإسقاطي  $\pi$  ،  $\ell \neq m$  .

المطلوب اثباته :  $\ell, m$  يشتركان في نقطة واحدة فقط .



**البرهان :**

ليكن  $\ell, m$  مستقيمين مختلفين في  $\pi$   $\ell \neq m$

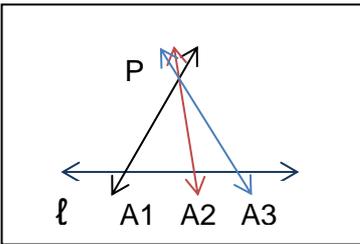
من البديهية (4)  $\exists A$  s.t.  $A \in \ell$  ,  $A \in m$

نفرض انه توجد نقطة اخرى  $B$  تختلف عن  $A$  بحيث ان  $B \in m$  ,  $B \in \ell$  ,

من البديهية (1)  $\ell = m$  وهذا يتناقض الفرض

❖  $\ell, m$  يشتركان في نقطة واحدة فقط .

**مبرهنة ( 2 ) :** أي نقطة في المستوى الإسقاطي هي عنصر لثلاثة مستقيمتان في الأقل.



$\pi$

المعطيات : لتكن  $P$  أي نقطة في  $\pi$  .

المطلوب اثباته : يوجد ثلاث خطوط تمر بالنقطة  $P$  .

**البرهان :**

لتكن  $P$  أي نقطة في  $\pi$  . من البديهية (3) يوجد مستقيم  $\ell$  بحيث ان  $P \notin \ell$  كذلك من

البديهية (2) توجد ثلاثة نقاط في الأقل على المستقيم  $\ell$  ولتكن  $A_1, A_2, A_3$  من البديهية

( 1 ) توجد المستقيمت  $PA_1, PA_2, PA_3$  التي تمر من  $P$  وتكون مختلفة.

نلاحظ : من مبرهنة (1) ان أي مستقيمين في المستوى الاسقاطي يتقاطعان في نقطة واحدة فقط . بتعبير اخر لا يمكن ان تتكلم عن المستقيمت المتوازية او المسقيمت التي لا تتقاطع لهذا لا يمكن ان تكون هذه المستقيمت في المستوى الاسقاطي .

### المستوى الاسقاطي المنتهي:

هو مجموعة منتهية (من النقاط و المستقيمت ) تحقق بديهيات المستوى الاسقاطي من (1) - (4) .

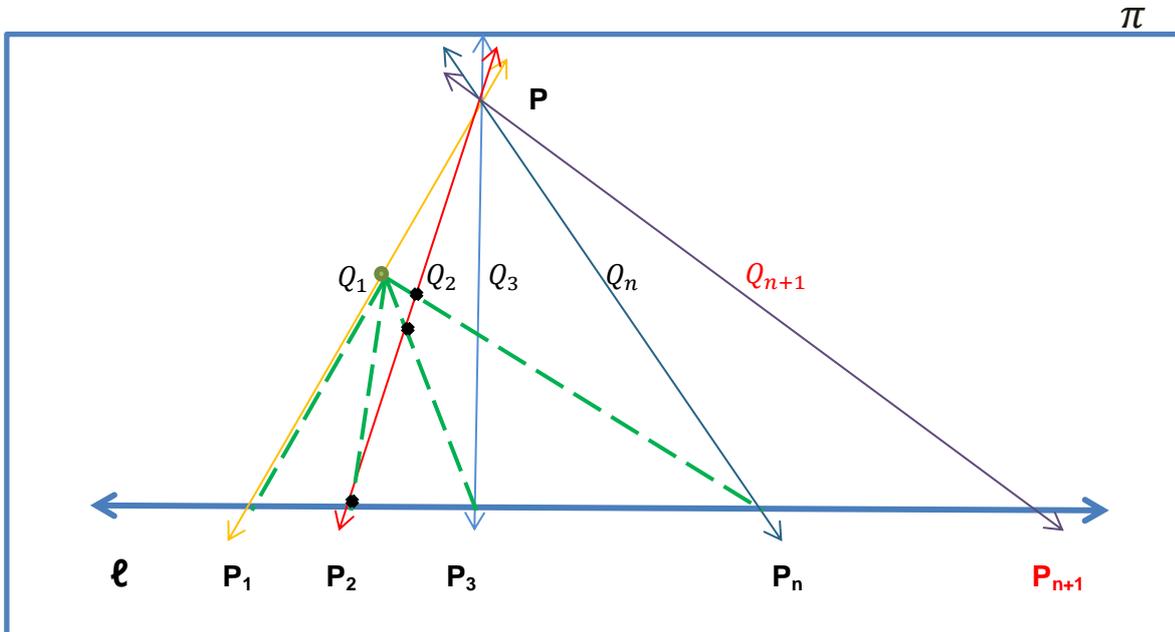
**مبرهنة (3):** اذا وجدت بالضبط  $n$  من النقاط على مستقيم لمستوى اسقاطي منتهي فإن المستوى يحتوي بالضبط على  $n^2 - n + 1$  من النقاط .

المعطيات : ليكن  $\ell$  مستقيم في مستوى اسقاطي منتهي  $\pi$  ،  $\ell$  يحتوي بالضبط على  $n$  من النقاط.

المطلوب اثباته : المستوى الاسقاطي المنتهي يحتوي بالضبط على  $n^2 - n + 1$  من النقاط .

### البرهان :

ليكن  $\ell$  مستقيما يحتوي بالضبط على  $n$  من النقاط ولتكن  $P_1, P_2, \dots, P_n$  من البديهية (3) توجد نقطة  $P$  لا تقع على  $\ell$  من البديهية (1) توجد  $n$  من الخطوط المختلفة  $PP_1, PP_2, \dots, PP_n$  ومن البديهية (2) توجد نقطة ثالثة على كل خط من هذه الخطوط ولتكن  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  على التوالي نأخذ النقطة  $Q_1$  ونصلها بالنقاط  $P_1, P_2, \dots, P_n$  فنحصل على



$n$  من الخطوط  $Q_1P_1, Q_1P_2, \dots, Q_1P_n$  هذه الخطوط تقطع  $PP_2$  في  $n-1$  من النقاط المختلفة لذلك  $PP_2$  يحتوي على  $n-1$  من النقاط عدا  $P$  ان هذا يصح لكل من المستقيمت  $PP_1, PP_2, \dots, PP_n$  وبهذا يوجد  $n$  من الخطوط وكل خط منها يحتوي على  $n-1$  من النقاط ومع النقطة  $P$  يحتوي المستوى  $n(n-1)+1 = n^2 - n + 1$  من النقاط في الاقل .

لكي نبرهن ان المستوى يحتوي على  $n^2 - n + 1$  من النقاط على الاكثر نفرض وجود نقطة  $Q$  لا تقع على اي مستقيم من تلك المستقيمت , المستقيم  $QP$  يختلف عن المستقيمت المذكورة , من المبرهنة (1)  $QP$  يقطع  $l$  في نقطة  $P_{n+1}$  التي تختلف عن النقاط  $P_1, P_2, \dots, P_n$  وبهذا يحتوي  $l$  على  $n+1$  من النقاط وهذا يخالف الفرض { كون  $l$  يحتوي بالضبط على  $n$  من النقاط } بهذا فقد برهنا على ان المستوى يحتوي بالضبط على  $n^2 - n + 1$  من النقاط .

لقد ذكرنا في هذه المبرهنة على انه اذا كان المستقيم يحتوي على  $n$  من النقاط فأن أي مستقيم اخر يحتوي ايضا على  $n$  من النقاط . لذلك نستنتج النتيجة التالية :

**نتيجة :** اذا كان في المستوى الاسقاطي المنتهي مستقيم يحتوي بالضبط على  $n$  من النقاط فأن أي مستقيم اخر يحتوي بالضبط على  $n$  من النقاط . ( واجب )

سؤال ؟

- اذا كان مستقيم في المستوي الاسقاطي المنتهي يحتوي على (4) نقاط فكم نقطة يحتوي هذا المستوي ؟

- اذا كان المستوي الاسقاطي المنتهي يحتوي على (7) نقاط فكم عدد النقاط على كل خط في هذا المستوي ؟

- اذا كان  $l$  في المستوي الاسقاطي يحتوي على (6) نقاط فكم نقطة يحتوي المستقيم  $m$  الواقع في هذا المستوي .

ية وبصورة عامة غير مفضلة .