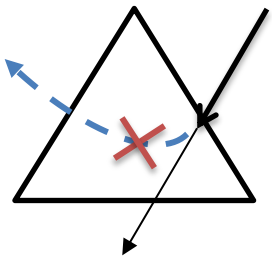
بديـــهة بـــاخ (The Axiom of Pasch)

لقد صاغ العالم باخ بديهيته ليس فقط على انها عبارة اعتمد عليها في البراهين و لكن لأنه ليس بالإمكان برهنتها من بديهيات اقليدس المعروفة .

تعريـف (7) : لتكن A,B,C ثلاث نقاط مختلفة و لا تقع على مستقيم واحد ان اتحاد {A,B,C} مع القطع A-B , A-C , B-C يدعى مثلثاً وتدعى A,B,C الرؤوس وتدعى A-B ,A-C, B-C الاضلاع والخطوط التي تحتوي الاضلاع تدعى خطوط الاضلاع .المثلث الذي يتعين من A,B,C يرمز له بالرمز $\triangle ABC$.

بديهية بـــاخ : اذا كام مستقيم لا يمر بأي رأس من رؤوس مثلث ويقطع ضلعا واحدا في المثلث فانه يقطع **في الأقل** واحدا من الضلعين الاخرين .



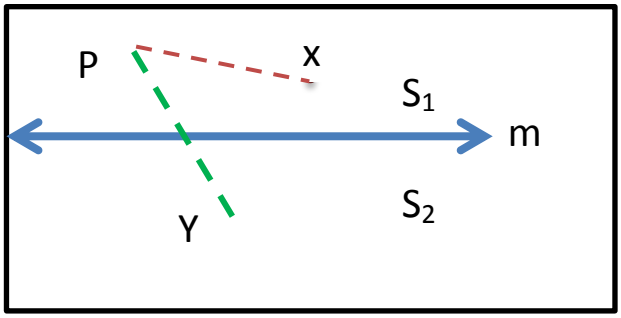
مبـــرهنة (17): اذا كان مستقيم يقطع ضلعا واحدا من مثلث فانه يقطع **في الأكثر** واحدا من الضلعين الاخرين .

نتيجة : المستقيم الذي يقطع ضلعا واحدا من مثلث و الذي لا يمر بأي رأس منه فانه يقطع ضلعا **واحدا فقط** من الضلعين الاخرين .

تعريف (8) : ليكن m أي مستقيم , P نقطة لا تقع على m لتكن S_1 مجموعة تحتوي على P و كل النقاط X لا تقع على m بحيث ان P-X لا تحتوي على نقطة من m .
لتكن S_2 مجموعة كل النقاط Y بحيث ان P -Y تحتوي على نقطة من m
فان S_1 و S_2 تدعيان جهتي المستقيم m وتدعيان أيضا نصفي المستوي بالنسبة للمستقيم m .

$S_1=\{ x : x \notin m : P\text{-}X \cap m = \varnothing \vee X=P \}$

$S_2 = \{ Y: Y \notin m : P\text{-}Y \cap m \neq \varnothing \}$



مبـــرهنة (18): جهتا المستقيم m غير خاليتين .

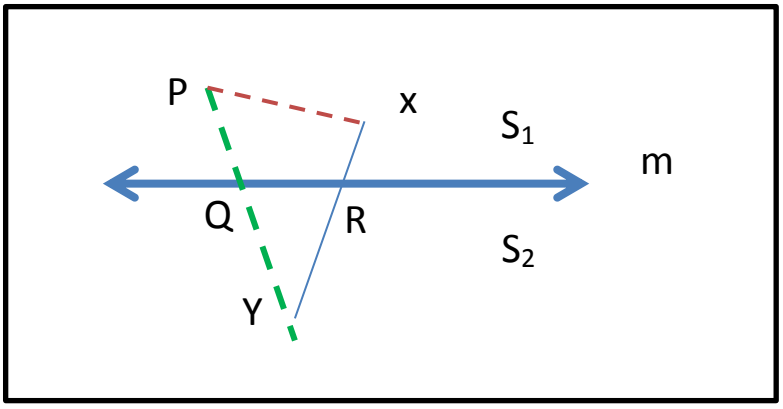
المعطيات : يوجد مستقيم m .

المطلوب اثباته : جهتا المستقيم m S_1 و S_2 غير خاليتين .

البرهـــان : ليكن m مستقيما , توجد نقطة Q على m ونقطة P لا تقع على m , من البديهية (9) توجد نقطة Y بحيث ان P-Q-Y ولذلك P-Y تحتوي على نقطة Q من m أي ان $Y \in S_2$ وعليه فان المجموعة S_2 هي مجموعة غير خالية .

توجد نقطة أخرى R على m ومن بديهية (9) توجد نقطة X بحيث ان X – R – Y , في $\triangle$ P X Y بما ان m يقطع الضلع P - Y في Q ويقطع الضلع X - Y في R فانه من مبرهنة (17) لا يمكن ان يقطع الضلع P - X

ومن بديهية (6) ومبرهنة (2) لا تقع X على m فانه $X \in S_1$ أي ان جهة المستقيم m المجموعة S_1 هي مجموعة غير خالية .



مبـــرهنـــة (19) : توجد جهتان فقط للمستقيم m وتكونان مع m تجزئة لمجموعة كل النقاط .

مبـــرهـــنة (20) : أي مستقيم m يفصل مجموعة كل النقاط الى جهتين .

مبـــرهنـــة (21) : ليكن m مستقيماً وp و p' نقطتين لا تقعان على m . جهتا المستقيم m المتعينتين من P و m هما نفس الجهتين المتعينتين من P' و m.

مبـــرهنة (22) : ليكن m' و m مستقيمين مختلفين, جهتا المستقيم m تختلفان عن جهتي المستقيم m' .