

الفصل الرابع

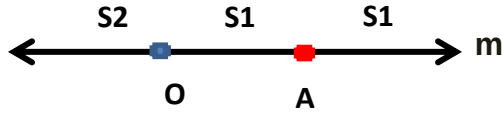
الفصل الرابع (المحاضرة 3 و4)

المجموعات المحدبة (Convex Sets)

عريف (9): تدعى المجموعة S مجموعة محدبة اذا وفقط اذا كان أي نقطتين تنتميان الى S فان $P-Q$ تكون مجموعة جزئية من S .



مبرهنة (23): (أ) أي مستقيم يكون مجموعة محدبة.

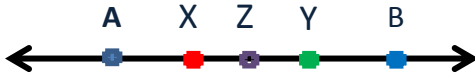


(ب) كل من جهتي نقطة O هي مجموعة محدبة.

مبرهنة (24): كل قطعة مستقيم هي مجموعة محدبة.

البرهان: لتكن $A-B$ قطعة يجب ان نبرهن ان $A-B$ هي مجموعة محدبة. لتكن

X و Y أي نقطتين مختلفتين في $A-B$ يجب ان نبرهن ان $X-Y$ هي مجموعة جزئية من $A-B$.



ليكن $Z \in X-Y$ $X-Z-Y \leftarrow$

$X \in A-B$ $A-X-B \leftarrow$

$Y \in A-B$ $A-Y-B \leftarrow$

من مبرهنة (5) و $A-X-B$ و $A-Y-B$ $A-Y-X \leftarrow$ او $A-X-Y$

عندما $A-X-Y$ وبما ان $X-Z-Y$ فان من مبرهنة (4) $A-X-Z-Y \leftarrow$ $A-Z-Y \leftarrow$

و بما ان $A-Y-B$ من مبرهنة (4) $A-Z-Y-B \leftarrow$

$A-Z-B \leftarrow$ $Z \in A-B$

عندما $A-Y-X$ من بديهية (5) يكون $X-Y-A$ وبما ان $X-Z-Y$

من مبرهنة (4) $X-Z-Y-A \leftarrow$ $X-Z-A \leftarrow$

من بديهية (5) $A-Z-X \leftarrow$ وبما ان $A-X-B$ ومن مبرهنة (4) $A-Z-X-B \leftarrow$

$A-Z-B \leftarrow$ $Z \in A-B$ وبهذا فان $A-B$ هي مجموعة محدبة.

مبرهنة (25): كل من جهتي المستقيم m هي مجموعة محدبة.

مبرهنة (26): تقاطع n من المجموعات المحدبة هو مجموعة محدبة .

البرهان : ليكن $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ حيث ان A_1 و A_2 و A_n هي مجموعات محدبة ، يجب ان نبرهن ان A هي مجموعة محدبة ،

لتكن X, Y نقطتين مختلفتين في A يجب ان نبين ان $X-Y$ هي مجموعة جزئية من A

$$X, Y \in A \longleftarrow X, Y \in A_n \text{ } X, Y \in A_2 \text{ , } X, Y \in A_1$$

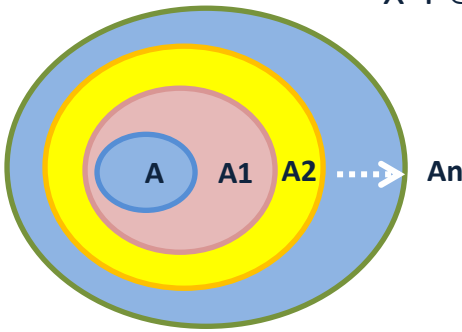
وبما ان A_1 و A_2 و A_n هي مجموعات محدبة

$$X-Y \subset A_1 \text{ و } X-Y \subset A_2 \text{ و و } X-Y \subset A_n$$

$$X-Y \subset A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

$$X-Y \subset A$$

$$\longleftarrow A \text{ هي مجموعة محدبة .}$$



تعريف (10): تدعى جهتا نقطة O على مستقيم m جهتي O المتعاكستين.

تعريف (11): تدعى جهتا المستقيم m جهتي m المتعاكستين .

مبرهنة (27):

أ- اذا كانت النقطتان A, B في جهتين متعاكستين من مستقيم m و B, C في نفس الجهة من m فان A, C في جهتين متعاكستين من m .

ب- اذا كانت النقطتان A, B في جهتين متعاكستين من مستقيم m و B, C في جهتين متعاكستين من m فان A, C في نفس الجهة من m .

ج- اذا كانت A, B في نفس الجهة من m و B, C في نفس الجهة من m فان C و a في نفس الجهة من m .

تعريف (12): مجموعة كل النقاط على مستقيم في نفس الجهة من نقطة O تدعى شعاع وتدعى O نقطة البداية ،

الشعاعان المناظران لجهتي O يدعيان شعاعين متعاكسين ،

يرمز للشعاع الذي بدايته A و B نقطة على الشعاع بالرمز : $\overrightarrow{AB}$

→

أي ان AB هو مجموعة كل النقاط X على المستقيم AB بحيث ان A لا تقع بين X و B ، بتعبير اخر اما يكون A-X-B او A-B-X .

مبرهنة (28) : واجب

أ- الشعاع هو مجموعة محدبة (يستنتج حالاً من مبرهنة (23ب) ومن تعريف الشعاع) .

ب- الشعاع هو مجموعة جزئية من مستقيم (يبرهن من تعريف الشعاع) .

ج- للشعاع نقطة بداية وحيدة (يبرهن من تعريف الشعاع ومن مبرهنة (9)) .

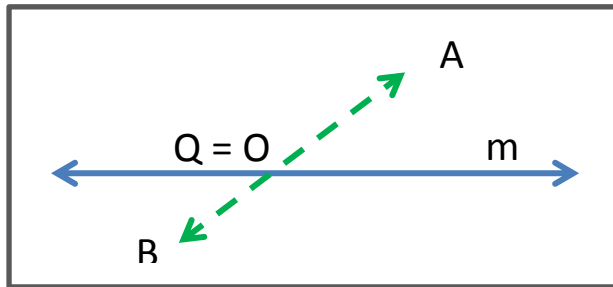
د- نقطة البداية لا تنتمي للشعاع (يبرهن مباشرة من مبرهنة (6) وتعريف الشعاع) .

هـ - لكل شعاع يوجد شعاع واحد معاكس له (يبرهن من تعريف الشعاع ومبرهنة (7)) .

ز - يتعين الشعاع من نقطة بدايته واي نقطة من نقاطه (يستنتج البرهان مباشرة من تعريف الشعاع ومبرهنة (8)) .

و- الشعاع الذي نقطة بدايته على مستقيم لكنه لا يقع على المستقيم فان كل نقاطه تقع في نفس الجهة من المستقيم.

برهان فرع (و) :



ليكن $\overrightarrow{OA}$ شعاع لا يقع على المستقيم m وان O على m . يجب ان نبرهن ان كل نقاط $\overrightarrow{OA}$ تقع في نفس الجهة من m

نفرض ان العبارة خطأ فتوجد نقطة B على $\overrightarrow{OA}$ بحيث ان B تقع في جهة m التي لا تحتوي على A أي ان A و B في جهتين متعاكستين من m

من تعريف الفصل ومبرهنة (20) حيث ان m يفصل جهتيه فانه توجد نقطة Q

على m بحيث ان A-Q-B . من تعريف الشعاع الذي هو جزء من مستقيم , O

تقع على المستقيم AB وبما ان A-Q-B فانه من بديهية (6) و Q تقع على

المستقيم AB أي ان الخط AB يقطع الخط m في النقطتين O و Q من بديهية

$$(1) \text{ يكون } O = Q \text{ بما ان } A-Q-B \leftarrow A-O-B$$

$\leftarrow A$ و B في جهتين متعاكستين من O على الخط AB . بتعبير اخر A و B

في شعاعين متعاكسين نقطة بدايتهما O

وهذا يخالف الفرض بان A و B تقعان على الشعاع $\overrightarrow{OA}$ لذل فان فرضيتنا خاطئة

أي ان كل نقاط $\overrightarrow{OA}$ تقع في نفس الجهة من m .