تطابق الزوايا والمثلثات

بديهية(4*): (بديهية إنشاء زاوية):

لتكن ABC زاوية وليكن DF شعاعاً على الخط m فإنه في كل جهة من m يوجد شعاع واحد فقط $\overrightarrow{DE}$ بحيث $\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDF$.

بديهية (5*): تطابق الزوايا هو علاقة تكافؤ.

بديهية (6*): في المثلثين ABC و DEF إذا كان $A-B \cong D-E$

و $A-C \cong D-F$ و $\measuredangle A \cong \measuredangle D$ فإن $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ و $\measuredangle C \cong \measuredangle F$.

تعريف (21): ليكن ABC و XYZ مثلثين إذا وجد تناظر بحيث أن

$A-B \cong X-Y$ $\quad$ $\measuredangle A \cong \measuredangle X$

$B-C \cong Y-Z$ $\quad$ $\measuredangle B \cong \measuredangle Y$

$A-C \cong X-Z$ $\quad$ $\measuredangle C \cong \measuredangle Z$

فإن هذا التناظر يدعى تناظر متطابق ويقال عن المثلثين متطابقان.

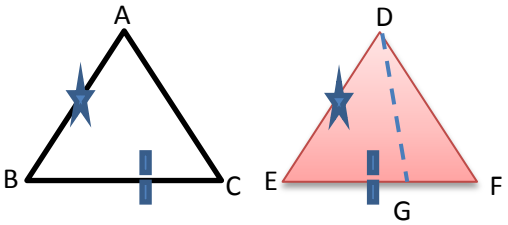
مبرهنة (49) (SAS):

إذا كان ضلعان والزاوية المحددة بهما في مثلث تطابق ضلعين والزاوية المحددة بهما من مثلث آخر فإن المثلثين يتطابقان .

بعبارة أخرة إذا كان في مثلثين DEF. ABC

$A-B \cong D-E, A-C \cong D-F, \measuredangle A \cong \measuredangle D$ فإن $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

المعطيات :



المطلوب اثباته :

البرهان: من بديهية (6*) $\leftarrow \measuredangle B \cong \measuredangle E$

و $\measuredangle C \cong \measuredangle F$ كل ما نحتاجه من تعريف (21)

أن نبرهن إن $B-C \cong E-F$ نفرض ان العبارة

خطأ. من مبرهنة (45) أما $B-C < E-F$ أو $E-F < B-C$

نفرض أن $B-C < E-F$

من تعريف (20) توجد نقطة G بحيث إن $B-C \cong E-G$

في المثلثين ABC و DEF من بديهية (6*) نستنتج ان $\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDG$ ولكن من الفرض $\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDF$ لذلك من بديهية (2*) نستنتج ان $DG = DF$ أي إن $F = G$ وهذا تناقض لان $F \neq G$

لذلك فإن الفرض بأن $B - C < E - F$ يؤدي إلى تناقض وبنفس الطريقة في الحالة الثانية لذلك فإن $B - C \cong E - F$ وإن $\Delta BAC \cong \Delta EDF$

تعريف (22): زاويتان لهما ضلع مشترك وضلعيهما الآخرين يكونان شعاعين متعاكسين يقال عنهما تكونان زوجاً خطياً.

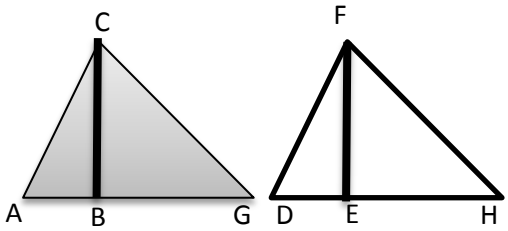
تعريف(23): زاويتان تطابقان على التوالي زاويتين لزوج خطي يقال عنهما متكاملتين أحدهما مكملة للأخرى.

من هذا التعريف ومن بديهة (5*) نستنتج المبرهنة التالية:

مبرهنة(50):إذا كانت زاويتان تكونان زوجاً خطياً فإنهما متكاملتان.

مبرهنة (51): إذا كانت زاويتان متطابقتين فإنه تتطابق كذلك الزاويتان اللتان تكونان معهما على التوالي زوجين خطيين. (تتطابق الزاويتان المكملتان)

البرهان: لتكن $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ من بديهية (9) توجد نقطة G بحيث ان $A - B - G$ وتوجد نقطة H بحيث أن $D - E - H$ لذا يكون الشعاعان BG, BA متعاكسين وكذلك الشعاعان $\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{ED}$ وتكونان الزاويتان FEH, GBC نختار النقاط F, H, D بطريقة لا تؤثر على التعميم بحيث ان $D - E \cong A - B$ و $E - F \cong B - C$ و $E - H \cong B - G$ يجب ان نبرهن ان $\measuredangle FEH \cong \measuredangle CBG$.



في المثلثين DEF, ABC

$A - B \cong D - E$

و $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ و $B - C \cong E - F$

لذلك من مبرهنة SAS

$A - G \cong D - H$ و $\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDF$

من بديهية (3*) $A-G \cong D-H$ لذلك مرة ثانية نطبق مبرهنة SAS على ΔCAG و ΔFDH فيكون $\Delta CAG \cong \Delta FDH$ وهذا يؤدي إلى أن

$C-G \cong F-H$ وإن $\measuredangle AGC \cong \measuredangle DHF$

في المثلثين CBG و FEH:

$\measuredangle BGC \cong \measuredangle EHF$, $B-G \cong E-H$, $G-C \cong F-H$

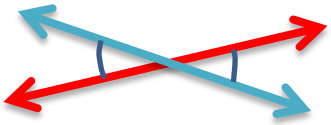
لذلك من بديهية (6*) نستنتج ان $\measuredangle CBG \cong \measuredangle FEH$.

نتيجة (1)

مكملات الزوايا المتطابقات تكون متطابقة.

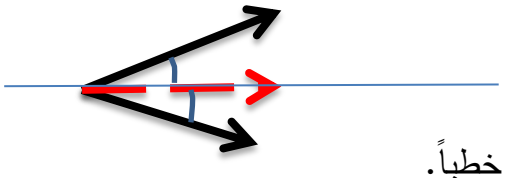
البرهان: نستنتج هذا من التعريف (23)، وبديهية(5*) ومبرهنة (51).

تعريف (24): يقال عن زاويتين لهما رأس مشترك بأنهما زاويتان رأسيتان إذا كان شعاعي زاوية واحدة هما الشعاعين المعاكسين لشعاعي الزاوية الأخرى.



نتيجة (2): تكون الزاويتان الرأسيتان متطابقتين.

تعريف (25): زاويتان لهما رأس مشترك و ضلع مشترك وضلعيهما الآخرين في الجهتين المتعاكستين لخط الضلع المشترك تدعيان زاويتين متجاورتين.



نتيجة(3): إذا كانت زاويتان متكاملتين ومتجاورتين فإنهما تكونان زوجاً خطياً.