القياس وجمع الزوايا:

تعريف(29): قياس زاوية AOB هو مجموعة كل الزوايا التي تطابق$\sphericalangle AOB$ ويرمز لها بالرمز $m(\sphericalangle AOB)$

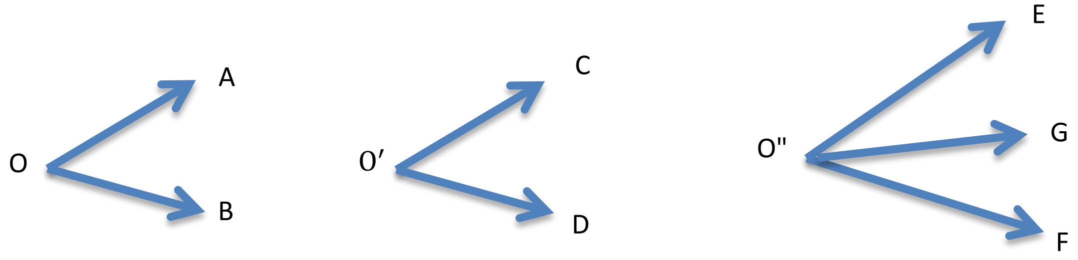
وكما في حالة القطع يستنتج إن قياس زاوية هو علاقة تكافؤ.

تعريف(30):

$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle CO'D)$ (إذا وجد) يعني $m(\sphericalangle EO''F)$ حيث إن

$\sphericalangle EO''F$ هي زاوية بحيث توجد نقطة G في داخل $\sphericalangle EO''F$ و

$\sphericalangle EO''G \cong \sphericalangle AOB$ و $\sphericalangle GO''F \cong \sphericalangle CO'D$.



تعريف (31): الجمع المعرف في تعريف (30) يقال أنه موجود إذا وجدت زاويتان متجاورتان $\sphericalangle EO''G, \sphericalangle GO''F$ وتحقق الخاصية التالية:

إذا كان $O''G$ هو الضلع المشترك للزاويتين المتجاورتين فإن $\overrightarrow{O''G}$ و $\overrightarrow{O''F}$ هما في نفس الجهة من المستقيم $O''E$ و $\overrightarrow{O''G}$ و $\overrightarrow{O''E}$ هما في نفس الجهة من المستقيم $O''F$.

تعريف (32): $m(\sphericalangle AOB) < m(\sphericalangle CO'D)$ يعني إن أي زاوية تطابق $\sphericalangle AOB$ تكون أصغر من أي زاوية تطابق $\sphericalangle CO'D$.

مبرهنة (63): إذا كان $m(\sphericalangle DEF) < m(\sphericalangle GHI)$ فإن كان الجمع موجود

$$m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle DEF) < m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle GHI)$$

مبرهنة (64): إذا كان $m(\sphericalangle DEF) < m(\sphericalangle GHI)$ فإذا كان الجمع موجود

$$m(\sphericalangle DEF) + m(\sphericalangle ABC) < m(\sphericalangle GHI) + m(\sphericalangle ABC)$$

مبرهنة (65):

إذا كان $m(\measuredangle ABC) < m(\measuredangle DEF)$,

$m(\measuredangle GHI) < m(\measuredangle JKL)$

(إذا كان الجمع موجود) فإن:

$$m(\measuredangle ABC) + m(\measuredangle GHI) < m(\measuredangle DEF) + m(\measuredangle JKL)$$

البرهان واجب:

قاعد لغوية: إذا كان الجمع لزاويتين موجود فإن الزاويتين يقال إنهما تؤخذان معاً أصغر من زاويتين قائمتين.

مبرهنة (66): في أي مثلث أي زاويتين تؤخذان معاً تكونان أصغر من زاويتين قائمتين.

البرهان: ليكن ABC مثلثاً وفيه $B - C - D$ فإن $\measuredangle ACD$ هي زاوية خارجية للمثلث وبذلك يكون $\measuredangle ABC < \measuredangle ACD$ (يجب أن نبرهن $\measuredangle BCA , \measuredangle ABC$ تؤخذان معاً تكونان اصغر من زاويتين قائمتين) بما أن $\measuredangle ABC < \measuredangle ACD$ يؤدي إلى وجود نقطة G في داخل $\measuredangle ACD$ بحيث إن $\measuredangle ACG \cong \measuredangle ABC$ في هذه الحالة إن

$\measuredangle ACG, \measuredangle BCA$ تحقق الشروط في تعريف (32) إذا كانت زاوية أصغر من زاوية فإن التي تطابقها تكون أيضاً اصغر. وباستخدام التعريفين (31) و (32) والقاعدة اللغوية التي تتبعهما نحصل على النتيجة ونفس الطريقة تتبع لاي زاويتين .

توضيح الحل بطريقه ثانية

بما أن $\measuredangle 3 > \measuredangle 1$ اذن توجد نقطة G في داخل $\measuredangle 3$ بحيث إن

$\measuredangle 1 * \cong \measuredangle 1$

في هذه الحالة إن $180 = \measuredangle 4 + \measuredangle 1 * + \measuredangle 2 = \measuredangle 3 + \measuredangle 2$

so $\measuredangle 2 + \measuredangle 1 * < 180$ but $\measuredangle 1 = \measuredangle 1 *$ so $\measuredangle 2 + \measuredangle 1 * < 180$

$$\measuredangle 1 + \measuredangle 2 < 180$$