المادة – الهندسة مرحله ثانية – قسم الرياضيات

المحتويات

الفصل الاول : الانظمة البديهيه

الفصل الثاني : خواص النظام البديهي

الفصل الثالث : البديهية الخامسة لأقليدس

الفصل الرابع : اسس الهندسة (بديهيات الوقوع و الوجود و بديهيات الترتيب)

الفصل الخامس : التطابق و المقارنة

الفصل السادس : الهندسة الهذلوليه – الهندسة الاهليجية

المصادر

1-الكتاب المنهجي- مفاهيم اساسيه في الهندسة – امال شهاب المختار – كليه التربيه ابن الهيثم – الطبعه الاولى 1991 .

2- نظم البديهيات و الهندسة – عبد الوهاب احمد السراج – جامعه صلاح الدين – العراق

3- Adler c.f. – modern geometry – mc grow hill 1967

4- مواقع من الانترنت Wikipedia

الفصل الخامس – التطابق و المقارنة

بديهية(1 ∗) (بديهية إ نشاء قطعة)

لتكن $A-B$ قطعة، C نقطة على الخط m فإنه كل شعاع على m نقطة بدايته C توجد نقطة واحدة فقط D بحيث أن $A-B=C-D$

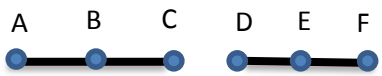
بديهية (2 ∗) (تطابق القطع هو علاقة تكافؤ)

نستنتج من هذه البديهية أن كل قطعة تطابق نفسها . وإذا كانت قطعة واحدة تطابق قطعة ثانية فإن الثانية تطابق الأولى. وإذا كانت القطعة الاولى تطابق قطعة ثانية والقطعة الثانية تطابق قطعة ثالثة فإنه الأولى تطابق الثالثة.

بديهية (3 ∗) (جمع القطع):

إذا كان $A-B-C$ و $D-E-F$ و $A-B \cong D-E$ و $B-C \cong E-F$

فإن $A-C \cong D-F$

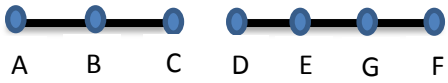


مبرهنة (43) (طرح القطع):

إذا كان $A-B-C$ و $D-E-F$ و $A-B \cong D-E$ و $A-C \cong D-F$ فإن $B-C \cong E-F$.

المعطيات :

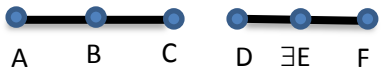
المطلوب اثباته :



البرهان: نفرض أن $B-C$ لا تطابق $E-F$ فإنه من بديهية (1 ∗) توجد نقطة G بحيث أن $B-C \cong E-G$ و $D-E-G$

كذلك بما أن $B-C$ لا تطابق $E-F$ فإنه من بديهية (2 ∗) نستنتج أن $E-F$ لا تطابق $E-G$ ومن هذا $F \neq G$ لكن بما أن $A-B \cong D-E$ ، $B-C \cong E-$ فإنه من بديهية (3 ∗) $A-C \cong D-G$ ولكن من الفرض ان $A-C \cong D-$ F فيكون من بديهية (2 ∗) $D-F \cong D-G$ ومن البديهيتين (1 ∗) و(2 ∗) نستنتج ان $F=G$ وهذا يقودنا إلى تناقض، لذلك فإن فرضيتنا خاطئة وبذلك نستنتج أن $B-C \cong E-F$.

مبرهنة (44) إذا كان $A-C \cong D-F$, B نقطة بحيث أن $A-B-C$ فإنه توجد نقطة E بحيث أن $D-E-F$, $A-B \cong D-E$.



مقارنة القطع

تعريف (20): $A-B$ تكون أصغر من $C-D$ إذا وجدت نقطة E بحيث أن $C-E-D$ و $A-B \cong C-E$ (يرمز للعبارة $A-B$ أصغر من $C-D$ بالرمز $A-B < C-D$) .

مبرهنة: (45):

إذا كانت $A-B$ و $C-D$ أي قطعتين فإن تتحقق واحدة فقط مما يأتي :

$C-D < A-B$ او $A-B \cong C-D$ او $A-B < C-D$

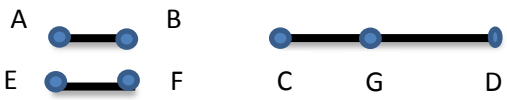
مبرهنة (46).

إذا كان $A-B < C-D$ و $A-B \cong E-F$ فإن $E-F < C-D$.

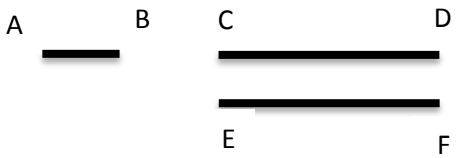
المعطيات :

المطلوب اثباته :

البرهان: بما أن $A-B < C-D$ فإنه توجد G بحيث أن $C-G-D$ و $A-B \cong C-G$ بما أنه من الفرض $A-B \cong E-F$ فإنه من بديهية $(2*)$ $E-F \cong C-G$ لذلك من تعريف (20) يكون $E-F < C-D$.



مبرهنة: (47): إذا كان $A-B < C-D$ و $E-F \cong C-D$ فإن $A-B < E-F$.



المعطيات :

المطلوب اثباته :

البرهان: من تعريف (20) توجد نقطة G بحيث أن $C-G-D$ و$A-B \cong C-G$ بما $E-H \cong C-G$ و $E-H-F$ بحيث ان H توجد نقطة (44) من مبرهنة G

$A-B \cong E-H$ (*2) فإنه من بديهية $A-B \cong C-G$ ان لذلك فإن $A-B < E-F$.

مبرهنة: (48): إذا كان $A-B < C-D$ و $C-D < E-F$ فإن $A-B < E-F$.

المعطيات :

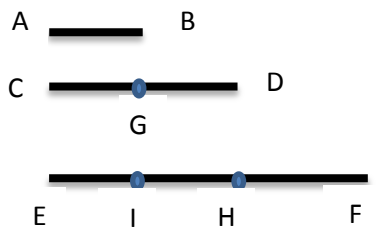
المطلوب اثباته :

البرهان: بما أن $A-B < C-D$ فإنه توجد نقطة G بحيث إن $C-G-D$ و $A-B \cong C-G$ بما أن $C-D < E-F$ فإنه توجد نقطة H بحيث أن $E-H-F$ و $C-D \cong E-H$ ومن مبرهنة (47) نستنتج ان

$A-B < E-H$ لذلك توجد نقطة I بحيث أن $E-I-H$ و $A-B \cong E-I$

بما أن $E-H-F$, $E-I-H$ فإنه من مبرهنة (4 الفصل الرابع)

$E-I-H-F$ لذلك $E-I-F$ وبذلك يكون $A-B < E-F$.



تطابق الزوايا والمثلثات

بديهية(4*): (بديهية إنشاء زاوية):

لتكن ABC زاوية وليكن DF شعاعاً على الخط m فإنه في كل جهة من m يوجد شعاع واحد فقط $\overrightarrow{DE}$ بحيث $\measuredangle EDF \cong \measuredangle BAC$.

بديهية (5*): تطابق الزوايا هو علاقة تكافؤ.

بديهية (6*): في المثلثين ABC و DEF إذا كان $A-B \cong D-E$

و $A-C \cong D-F$ و $\measuredangle A \cong \measuredangle D$ فإن $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ و $\measuredangle C \cong \measuredangle F$.

تعريف (21): ليكن ABC و XYZ مثلثين إذا وجد تناظر بحيث أن

$$A-B \cong X-Y \qquad \measuredangle A \cong \measuredangle X$$
$$B-C \cong Y-Z \qquad \measuredangle B \cong \measuredangle Y$$
$$A-C \cong X-Z \qquad \measuredangle C \cong \measuredangle Z$$

فإن هذا التناظر يدعى تناظر متطابق ويقال عن المثلثين متطابقان.

مبرهنة (49) (SAS):

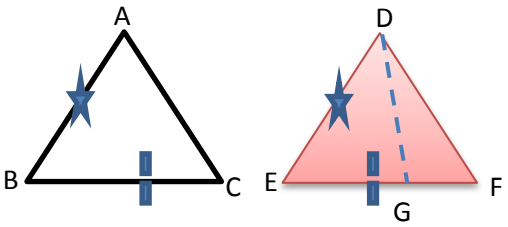
إذا كان ضلعان والزاوية المحددة بهما في مثلث تطابق ضلعين والزاوية المحددة بهما من مثلث آخر فإن المثلثين يتطابقان .

بعبارة أخرة إذا كان في مثلثين DEF. ABC

$A-B \cong D-E, A-C \cong D-F, \measuredangle A \cong \measuredangle D$ فإن $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

المعطيات :

المطلوب اثباته :



البرهان: من بديهية (6*) $\measuredangle B \cong \measuredangle E \leftarrow$

و $\measuredangle C \cong \measuredangle F$ كل ما نحتاجه من تعريف (21)

أن نبرهن إن $B-C \cong E-F$ نفرض ان العبارة

خطأ. من مبرهنة (45) أما $B-C < E-F$ أو $E-F < B-C$

نفرض أن $B-C < E-F$

من تعريف (20) توجد نقطة G بحيث إن $B-C \cong E-G$

في المثلثين ABC و DEF من بديهية (6*) نستنتج ان $\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDG$ ولكن من الفرض $\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDF$ لذلك من بديهية (2*) نستنتج ان $DG = DF$ أي إن $F = G$ وهذا تناقض لان $F \neq G$

لذلك فإن الفرض بأن $B-C < E-F$ يؤدي إلى تناقض وبنفس الطريقة في الحالة الثانية

لذلك فإن $B-C \cong E-F$ وإن $\Delta BAC \cong \Delta EDF$

تعريف (22): زاويتان لهما ضلع مشترك وضلعيهما الآخرين يكونان شعاعين متعاكسين يقال عنهما تكونان زوجاً خطياً.

تعريف(23): زاويتان تطابقان على التوالي زاويتين لزوج خطي يقال عنهما متكاملتين أحدهما مكملة للأخرى.

من هذا التعريف ومن بديهة (5*) نستنتج المبرهنة التالية:

مبرهنة(50):إذا كانت زاويتان تكونان زوجاً خطياً فإنهما متكاملتان.

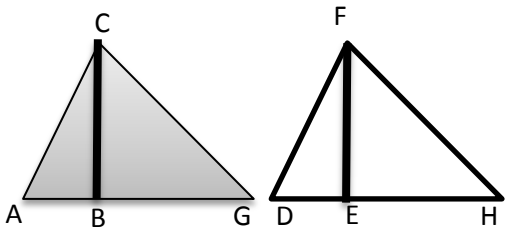
مبرهنة (51): إذا كانت زاويتان متطابقتين فإنه تتطابق كذلك الزاويتان اللتان تكونان معهما على التوالي زوجين خطيين. (تتطابق الزاويتان المكملتان)

البرهان: لتكن $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ من بديهية (9) توجد نقطة G بحيث ان

$A - B - G$ وتوجد نقطة H بحيث أن $D - E - H$ لذا يكون الشعاعان BG, BA متعاكسين وكذلك الشعاعان $\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{ED}$ وتكونان الزاويتان FEH, GBC نختار النقاط F, H, D بطريقة لا تؤثر على التعميم بحيث ان $D - E \cong A - B$

و $E - F \cong B - C$ و $E - H \cong B - G$ يجب ان نبرهن ان

$\measuredangle FEH \cong \measuredangle CBG$.



في المثلثين DEF, ABC

$A - B \cong D - E$

و $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ و $B - C \cong E - F$

لذلك من مبرهنة SAS

$A - G \cong D - H$ و $\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDF$

من بديهية (3*) $A - G \cong D - H$ لذلك مرة ثانية نطبق مبرهنة SAS على ΔCAG و ΔFDH فيكون $\Delta CAG \cong \Delta FDH$ وهذا يؤدي إلى أن

$C - G \cong F - H$ وإن $\measuredangle AGC \cong \measuredangle DHF$

في المثلثين CBG و FEH:

$\measuredangle BGC \cong \measuredangle EHF$, $B - G \cong E - H$, $G - C \cong F - H$

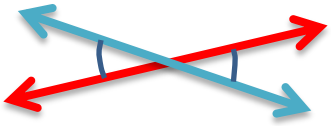
لذلك من بديهية (6*) نستنتج ان $\measuredangle CBG \cong \measuredangle FEH$.

نتيجة (1)

مكملات الزوايا المتطابقات تكون متطابقة.

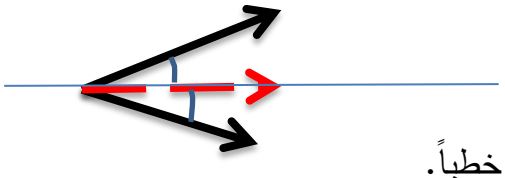
البرهان: نستنتج هذا من التعريف (23)، وبديهية(5*) ومبرهنة (51).

تعريف (24): يقال عن زاويتين لهما رأس مشترك بأنهما زاويتان رأسيتان إذا كان شعاعي زاوية واحدة هما الشعاعين المعاكسين لشعاعي الزاوية الأخرى.



نتيجة (2): تكون الزاويتان الرأسيتان متطابقتين.

تعريف (25): زاويتان لهما رأس مشترك و ضلع مشترك وضلعيهما الآخرين في الجهتين المتعاكستين لخط الضلع المشترك تدعيان زاويتين متجاورتين.



نتيجة(3): إذا كانت زاويتان متكاملتين ومتجاورتين فإنهما تكونان زوجاً خطياً.

مقارنة الزوايا

تعريف (26): تكون زاوية ABC أصغر من زاوية DEF إذا وفقط يوجد شعاع $\overrightarrow{EH}$ في داخل $\measuredangle DEF$ بحيث $\measuredangle HEF \cong \measuredangle ABC$ ويرمز لهذا بالرمز:

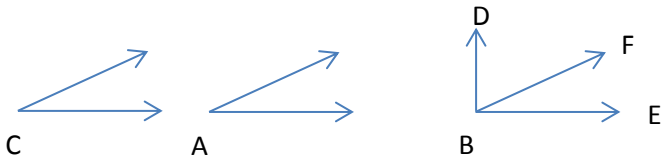
$$\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$$

مبرهنة (52): لأي زوج من الزوايا وليكن $\measuredangle A, \measuredangle B$ فإنه تتحقق واحدة فقط مما يلي

$$\measuredangle A < \measuredangle B \ , \ \measuredangle A \cong \measuredangle B \ , \ \measuredangle B < \measuredangle A \ .$$

مبرهنة (53): إذا كان $\measuredangle A < \measuredangle B$ و $\measuredangle A \cong \measuredangle C$ فإنه $\measuredangle C < \measuredangle B$.

المعطيات : **المطلوب اثباته :**



البرهان: لتكن $\measuredangle DBE = \measuredangle B$ بما ان $\measuredangle A < \measuredangle B$ ومن تعريف (26) يوجد شعاع $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\measuredangle B$ بحيث ان $\measuredangle FBE \cong \measuredangle A$

ومن الفرض $\measuredangle C \cong \measuredangle A$ فإنه من بديهية (5*) $\measuredangle C \cong \measuredangle FBE$ ومن تعريف (26) $\measuredangle B < \measuredangle C$.

مبرهنة (54) إذا كان $\measuredangle B < \measuredangle A$ و $\measuredangle B \cong \measuredangle C$ فإن $\measuredangle C < \measuredangle A$

البرهان: لتكن $\measuredangle B = \measuredangle DBE, \measuredangle C = \measuredangle GCH$

بما أن $\measuredangle A < \measuredangle B$ فأنه من تعريف (26) يوجد شعاع $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\measuredangle B$ بحيث $\measuredangle A \cong \measuredangle FBE$.

$\measuredangle C \cong \measuredangle B$, $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\measuredangle B$ فإنه من مبرهنة (55) { إذا كان $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ وإن BG شعاع في داخل $\measuredangle ABC$ فإنه يوجد شعاع EH في داخل $\measuredangle DEF$ بحيث أن $\measuredangle ABG \cong \measuredangle DEH$ و $\measuredangle GBC \cong \measuredangle HEF$ }

يوجد شعاع $\overrightarrow{CI}$ في داخل $\measuredangle C$ بحيث $\measuredangle FBE \cong \measuredangle ICH$ وبما أن $\measuredangle FBE \cong \measuredangle A$ فإنه من بديهية (5*) $\measuredangle A \cong \measuredangle ICH$, ومن تعريف (26)$\measuredangle C < \measuredangle A$.

جمع وطرح الزوايا

مبرهنة (55): إذا كان $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ وإن $\overrightarrow{BG}$ شعاع في داخل $\measuredangle ABC$ فإنه يوجد شعاع EH في داخل $\measuredangle DEF$ بحيث أن $\measuredangle ABG \cong \measuredangle DEH$ و $\measuredangle GBC \cong \measuredangle HEF$.

(مبرهنة جمع الزوايا – 56):

لتكن $\measuredangle ABC, \measuredangle DEF$ زاويتان لهما على التوالي الشعاعين $\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{EH}$ يقعان داخليهما $\measuredangle ABG \cong \measuredangle DEH, \measuredangle GBC \cong \measuredangle HEF$ فإن $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$

البرهان:

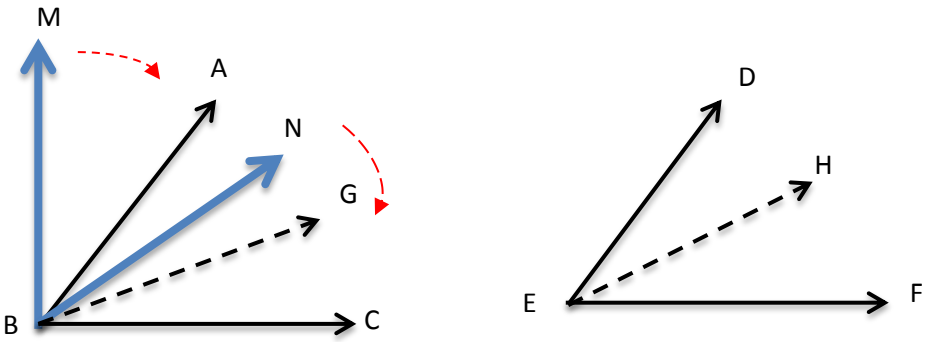
من بديهية (4*) يوجد شعاع $\overrightarrow{BM}$ في جهة الخط BC التي تحتوي على A بحيث ان $\measuredangle DEF \cong \measuredangle MBC$ بما أن $\overrightarrow{EH}$ في داخل $\measuredangle DEF$ فإنه من مبرهنة (55) يوجد شعاع $\overrightarrow{BN}$ في داخل $\measuredangle MBC$ بحيث إن $\measuredangle HEF \cong \measuredangle NBC$ ،

$\measuredangle DEH \cong \measuredangle MBN$

ولكن من الفرض $\measuredangle HEF \cong \measuredangle GBC$ لذلك من بديهية (5*)

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BG}$ (*4) ومن بديهية $\measuredangle GBC \cong \measuredangle NBC$

لذلك $\measuredangle ABG \cong \measuredangle DEH \cong \measuredangle MBN = \measuredangle MBG$



ومن هذا $\measuredangle ABG \cong \measuredangle MBG$ ومن بديهية (*4) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ لذلك

$\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ أي ان $\measuredangle ABC = \measuredangle MBC \cong \measuredangle DEF$

(مبرهنة طرح الزوايا – 57):

إذا كان $\measuredangle GFH \cong \measuredangle CBD$ و$\measuredangle HFE \cong \measuredangle DBA$ وإن الشعاعين $\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{BA}$ يقعان في داخل $\measuredangle CBD, \measuredangle GFH$ على التوالي فإن $\measuredangle EFG \cong \measuredangle ABC$

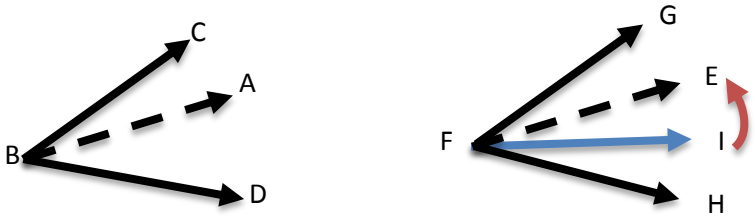
البرهان: بما أن $\measuredangle GFH \cong \measuredangle CBD$ وإن $\overrightarrow{BA}$ شعاع في داخل $\measuredangle DBC$ فإنه من مبرهنة (55) يوجد شعاع $\overrightarrow{FI}$ في داخل $\measuredangle GFH$ بحيث ان $\measuredangle IFG \cong \measuredangle ABC$

$\measuredangle DBA \cong \measuredangle HFI$

لكن من الفرض $\measuredangle DBA \cong \measuredangle HFE$

فإنه من بديهية (*5) $\measuredangle HFI \cong \measuredangle HFE$ ومن بديهية (*4) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FI} \leftarrow$

$\leftarrow E = I$ بما ان $\measuredangle IFG \cong \measuredangle ABC \leftarrow \measuredangle EFG \cong \measuredangle ABC$



القياس Measure

تعريف (27): قياس (Measure) قطعة مستقيم $A-B$ هو مجموعة كل قطع المستقيمات التي تطابق $A-B$ ويرمز لها بالرمز $m(A-B)$.

من التعريف نستنتج ان $A-B \cong C-D \Leftrightarrow m(A-B)-m(C-D)$ قياس قطعة المستقيم هو علاقة التكافؤ.

تعريف (28): $m(A-B)+m(C-D)$ يعني $m(X-Z)$ حيث أن

$X-Z$ قطعة مستقيم بحيث انه توجد نقطة Y و $X-Y-Z$

وإن $A-B \cong X-Y$ و $C-D \cong Y-Z$

مبرهنة (59) إذا كان $m(C-D) < m(E-F)$ فإن

$$m(A-B)+m(C-D) < m(A-B)+m(E-F)$$

مبرهنة (60):

إذا كان $m(C-D) < m(E-F)$ فإن

$$m(C-D)+m(A-D) < m(E-F)+m(A-B)$$

مبرهنة (61):

إذا كان $m(A-B) < m(C-D)$ و $m(E-F) < m(G-H)$

فإن $m(A-B)+m(E-F) < m(C-D)+m(G-H)$

البرهان:

من مبرهنة (60) إذا كان $m(A-B) < m(C-D)$ فإن

$$m(A-B)+m(E-F) < m(C-D)+m(E-F)$$

من مبرهنة (59) إذا كان $m(E-F) < m(G-H)$ نستنتج ان

$$m(C-D)+m(E-F) < m(C-D)+m(G-H)$$

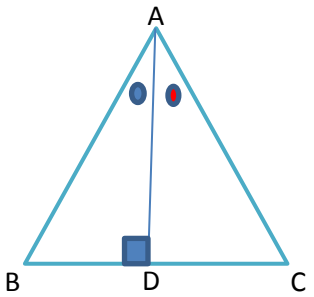
لذلك من التعويض ومن الخاصية المتعدية يكون:

$$m(A-B)+m(E-F) < m(C-D)+m(E-F) < m(C-D)+m(G-H)$$
$$\Rightarrow m(A-B)+m(E-F) < (C-D)+m(G-H)$$

مبرهنة (62): في أي مثلث يكون أي ضلعين معاً أكبر من الضلع الثالث.

البرهان: ليكن ABC مثلثاً يجب ان نبرهن:

$$m(B-C) < m(A-B) + m(A-C)$$
$$m(A-C) < m(A-B) + m(B-C)$$
$$m(A-B) < m(B-C) + m(A-C)$$



سنبرهن الحالة الأولى وبنفس الطريقة نبرهن البقية:

ليكن $\overline{AD}$ منصف $\measuredangle BAC$ يقطع $B-C$ في نقطة D أي إن $B-D-C$ لذلك تكون $\measuredangle ADB$ زاوية خارجية للمثلث ADC لذا من مبرهنة (أي زاوية داخلية لمثلث تكون أصغر من أي زاوية خارجية مقابلة لها) $\measuredangle ADB > \measuredangle DAC$ لكن

$$\measuredangle DAC \cong \measuredangle BAD$$

لذلك من مبرهنة **(53)** { إذا كان $\measuredangle B < \measuredangle A$ و $\measuredangle A \cong \measuredangle C$ فإنه $\measuredangle B < \measuredangle C$} .

$$\measuredangle BAD < \measuredangle ADB$$

ومن مبرهنة (إذا كانت زاويتان في مثلث غير متطابقتين فإن الضلعين المقابلين لهما غير متطابقين والضلع الأصغر يقابل الزاوية الصغرى) $\Leftarrow B-D < A-B$

وبنفس الطريقة نستطيع ان نبين ان $C-D < A-C$ لذلك من مبرهنة (61)

$$m(B-D) + m(C-D) < m(A-B) + m(A-C)$$

أي ان $m(B-C) < m(A-B) + m(A-C)$

القياس وجمع الزوايا:

تعريف(29): قياس زاوية AOB هو مجموعة كل الزوايا التي تطابق $\measuredangle AOB$ ويرمز لها بالرمز $m(\measuredangle AOB)$

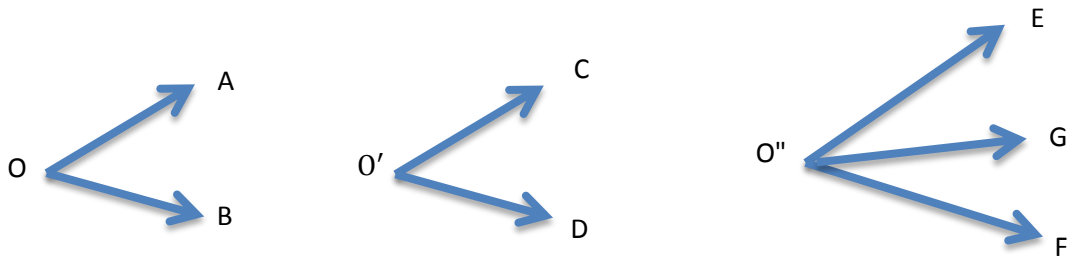
وكما في حالة القطع يستنتج إن قياس زاوية هو علاقة تكافؤ.

تعريف(30):

$m(\measuredangle AOB) + m(\measuredangle CO'D)$ (إذا وجد) يعني $m(\measuredangle EO''F)$ حيث إن

$\measuredangle EO''F$ هي زاوية بحيث توجد نقطة G في داخل $\measuredangle EO''F$ و

$\measuredangle EO''G \cong \measuredangle AOB$ و $\measuredangle GO''F \cong \measuredangle CO'D$.



تعريف (31): الجمع المعرف في تعريف (30) يقال أنه موجود إذا وجدت زاويتان متجاورتان $\measuredangle EO''G, \measuredangle GO''F$ وتحقق الخاصية التالية:

إذا كان $O''G$ هو الضلع المشترك للزاويتين المتجاورتين فإن $\overrightarrow{O''G}$ و $\overrightarrow{O''F}$ هما في نفس الجهة من المستقيم $O''E$ و $\overrightarrow{O''G}$ و $\overrightarrow{O''E}$ هما في نفس الجهة من المستقيم $O''F$.

تعريف (32): $m(\measuredangle AOB) < m(\measuredangle CO'D)$ يعني إن أي زاوية تطابق $\measuredangle AOB$ تكون أصغر من أي زاوية تطابق $\measuredangle CO'D$.

مبرهنة (63): إذا كان $m(\measuredangle DEF) < m(\measuredangle GHI)$ فإن كان الجمع موجود

$$m(\measuredangle ABC) + m(\measuredangle DEF) < m(\measuredangle ABC) + m(\measuredangle GHI)$$

مبرهنة (64): إذا كان $m(\measuredangle DEF) < m(\measuredangle GHI)$ فإذا كان الجمع موجود

$$m(\measuredangle DEF) + m(\measuredangle ABC) < m(\measuredangle GHI) + m(\measuredangle ABC)$$

مبرهنة (65):

إذا كان $m(\measuredangle ABC) < m(\measuredangle DEF)$,

$$m(\measuredangle GHI) < m(\measuredangle JKL)$$

(إذا كان الجمع موجود) فإن:

$$m(\measuredangle ABC) + m(\measuredangle GHI) < m(\measuredangle DEF) + m(\measuredangle JKL)$$

البرهان واجب:

قاعد لغوية: إذا كان الجمع لزاويتين موجود فإن الزاويتين يقال إنهما تؤخذان معاً أصغر من زاويتين قائمتين.

مبرهنة (66): في أي مثلث أي زاويتين تؤخذان معاً تكونان أصغر من زاويتين قائمتين.

البرهان: ليكن ABC مثلثاً وفيه $B-C-D$ فإن $\measuredangle ACD$ هي زاوية خارجية للمثلث وبذلك يكون $\measuredangle ABC < \measuredangle ACD$ (يجب أن نبرهن $\measuredangle ABC, \measuredangle BCA$ تؤخذان معاً تكونان اصغر من زاويتين قائمتين) بما أن $\measuredangle ABC < \measuredangle ACD$ يؤدي إلى وجود نقطة G في داخل $\measuredangle ACD$ بحيث إن $\measuredangle ABC \cong \measuredangle ACG$ في هذه الحالة إن

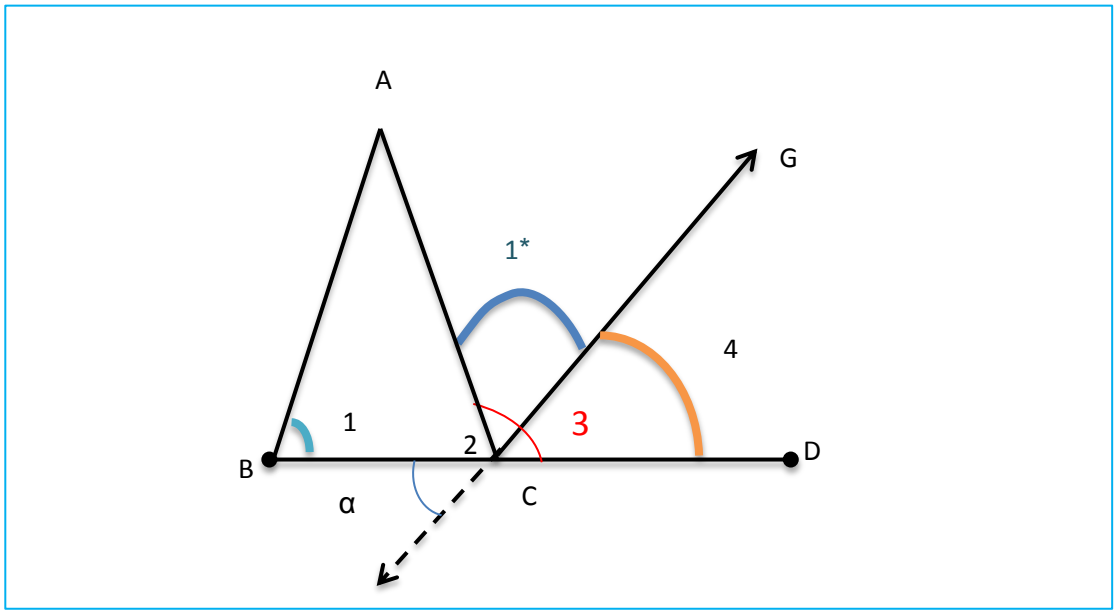
$\measuredangle BCA, \measuredangle ACG$ تحقق الشروط في تعريف (32) إذا كانت زاوية أصغر من زاوية فإن التي تطابقها تكون أيضاً اصغر. وباستخدام التعريفين (31) و (32) والقاعدة اللغوية التي تتبعهما نحصل على النتيجة ونفس الطريقة تتبع لاي زاويتين .

توضيح الحل بطريقه ثانية

بما أن $\measuredangle 3 > \measuredangle 1$ اذن توجد نقطة G في داخل $\measuredangle 3$ بحيث إن

$\measuredangle 1 \cong \measuredangle 1*$

في هذه الحالة إن $\measuredangle 2 + \measuredangle 3 = \measuredangle 2 + \measuredangle 1* + \measuredangle 4 = 180$

so $\measuredangle 2 + \measuredangle 1* < 180$ but $\measuredangle 1 = \measuredangle 1*$ so $\measuredangle 2 + \measuredangle 1* < 180$

$$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 < 180$$