الهندسة الهذولية

Hyperbolic Geometry

لقد تمكن العالمان جون بوليا ولوباجفسكي من بناء الهندسة الهذولية وذلك بأخذ نقيض البديهية الخامسة لاقليدس في شكل ما.

بما ان بديهية بليفر هي احدى مكافئات البديهية الخامسة فأن النقيض يكون بالشكل التالي : (من نقطة لا تقع على مستقيم معلوم يمكن رسم اكثر من موازي واحد لايقطع المستقيم المعلوم).

<u>بديهية التوازي الهذولية Hpp</u>

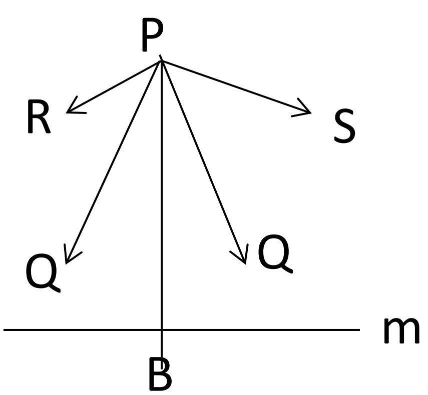
اذا كانت p نقطة لا تقع على مستقيم معلوم m فانه يوجد شعاعان فقط وليكن $\underset{PR}{\rightarrow}$ و $\underset{PS}{\rightarrow}$ بحيث ان :

1. $\underset{PR}{\rightarrow}$ و $\underset{PS}{\rightarrow}$ شعاعين غير متعاكسين
2. $\underset{PR}{\rightarrow}$ و $\underset{PS}{\rightarrow}$ لايقطعانm
3. اي شعاع $\underset{PQ}{\rightarrow}$ يقطع m اذاوفقط اذا $\underset{PQ}{\rightarrow}$ يقع بين $\underset{PR}{\rightarrow}$ و $\underset{PS}{\rightarrow}$.
4. كل من الشعاعين $\underset{PR}{\rightarrow}$ و $\underset{PS}{\rightarrow}$ المذكورين في Hppيدعى موازي الى m من p

مبرهنة (67) :

اذا كان الشعاع يقع بين شعاع موازي لمستقيم معلوم وشعاع يقطع المستقيم المعلوم فأنه يقطع المستقيم المعلوم .

البرهان :



ليكن $\underset{PR}{\longrightarrow}$ و $\underset{PS}{\longrightarrow}$ شعاعين يوازيان خط *m* من نقطة *P* . وان *B* اي نقطة على *m* و $\underset{PQ}{\longrightarrow}$ اي شعاع يقع بين $\underset{PR}{\longrightarrow}$ و $\underset{PB}{\longrightarrow}$ يجب ان نبرهن ان $\underset{PQ}{\longrightarrow}$ يقطع *m*.

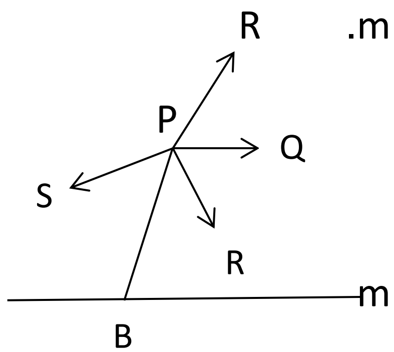
بما ان $\overline{PB}$ وقطع *m* فإن من *Hpp*، $\overline{PB}$ يقع بين $\overline{PR}$ و $\overline{PS}$ وبما ان $\overline{PQ}$ يقع بين $\overline{PR}$ و $\overline{PB}$ فإنه من مبرهنة (اذا كان $\overline{AE}$ يقع بين $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ وان $\overline{AE}$ يقع بين $\overline{AD}$ و $\overline{AC}$ فإن $\overline{AE}$ يقع بين $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$)

$\overline{PQ}$ يقع بين $\overline{PR}$ و $\overline{PS}$ ومن *Hpp*، $\overline{PQ}$ يقطع *m* وبالمثل اذا كان $\overline{PQ}$ يقع بين $\overline{PS}$ و $\overline{PB}$.

مبرهنة (68) :

اذا كان $\overline{PQ}$ لا يقطع مستقيم m لكن اي شعاع يقع بين $\overline{PQ}$ و $\overline{PB}$ حيث ان نقطة B نقطة على m فإن $\overline{PQ}$ يوازي المستقيم m.

البراهان:



ليكن m مستقيماً، P نقطة لا تقع على m و $\overline{PQ}$ شعاع لا يقطع m.

من Hpp $\longleftarrow$ يوجد شعاعان $\overline{PR}$ و $\overline{PS}$ من P ويوازيان m.

من المفرض $\longleftarrow$ Q وB و P لا تقع على مستقيم واحد

$\longleftarrow$ Q لا تقع على المستقيم PB

$\longleftarrow$ تقع Q غي احدى جهتي PB

من Hpp $\longleftarrow$ $\overline{PR}$ و $\overline{PS}$ في الجهتين المتعاكستين للمستقيم PB

$\longleftarrow$ اما تقع Q في جهة $\overline{PB}$ التي تحتوي R او في جهة $\overline{PB}$ التي تحتوي S.

نفرض ان Q تقع في جهة $\overline{PB}$ التي تحتوي R.

اما $\overline{PR}$ يقع بين $\overline{PB}$ و $\overline{PQ}$ و $\overline{PQ}$ يقع بين $\overline{PB}$ و $\overline{PR}$ او $\overline{PQ}$ =$\overline{PR}$

اذا كان $\overline{PR}$ يقع بين $\overline{PB}$ و $\overline{PQ}$ فمن الفرض $\overline{PR}$ يقطع m وهذا يخالف HPP.

اما اذا كان $\overline{PQ}$ يقع بين $\overline{PR}$ و $\overline{PB}$ فمن مبرهنة (67)، $\overline{PQ}$ يقطع m وهذا سخالف الفرض.

لذا فأن $\overline{PR}$ =$\overline{PQ}$ وبنفس الطريقة اذا كانت Q في جهة $\overline{PB}$ التي تحتوي على S.

مبرهنة (69) :

اذا كانت نقطة Q هي اثر العمود النازل من نقطة P على مستقيم معلوم m و$\overline{PR}$ و $\overline{PS}$ الموازيان من P الى m فإن $<SPQ \cong <RPQ$

مبرهنة (70) :

اذا كانت نقطة Q هي اثر العمود النازل من نقطة P على مستقيم معلوم m و$\overline{PR}$ و $\overline{PS}$ هما الشعاعان الموازيان للمستقيم m من P فإن $<RPQ$ و$<SPQ$ زاويتان حادتان.

البرهان:

نفرض ان العبارة من مبرهنة (69) $\longleftarrow$ $<SPQ \cong <RPQ$

نفرض انهما زاويتان قائمتان فإن $\overline{PR}$ و $\overline{PS}$ شعاعان متعاكسان وهذا يناقض Hpp.

اذا كانتا زاويتين منفرجتين فإنه يوجد شعاع $\overline{PE}$ في داخل $<SPQ$ او $<RPQ$ يصنع زاوية قائمة.

من مبرهنة (67) $\longleftarrow$ $\overline{PE}$ يقطع m وهذا يناقض مبرهنة (اذا قطع مستقيمين بقاطع وكانت الزاويتان الداخليتان في نفس الجهة من القاطع متكاملتين فإن المستقيمين لا يتقاطعان).

لذلك فإن الزاويتين يجب ان تكونا حادتين.

الهندسة الاهليليجية

Elliptic Geometry

البديهية المميزة للهندسة الاقليدية تنص على انه من نقطة معلومة يمكن رسم موازي واحد فقط لمستقيم معلوم.

من ناحية اخرى المظهر المميز للهندسة المستوية الهذلولية هو الفرض بوجود اكثر من موازي واحد للمستقيم من نقطة معلومة من هنا تأتينا فرضية ثالثة هي لايمكن رسم خط من نقطة معلومة ويوازي خطا معلوما هذه هي البديهية المميزة للهندسة الاهليجية , ان اول من اشار الى هذه البديهية التي هي تناقض بديهية التوازي لأقليدس هو العالم الالماني برنهارد ريمان في عام 1853.

تكون الكرة نموذج لهذه الهندسة حيث نقاط الكرة ودوائرها العظمى تمثل نقاط او مستقيمات هذه الهندسة.

وبما ان الدوائر العظمى تتقاطع دائما فأن المستقيمين يتقاطعان دائما ولذلك لا توجد مستقيمات موازية للمستقيم .