الهندسة الهذولية

Hyperbolic Geometry

لقد تمكن العالمان جون بوليا ولوباجفسكي من بناء الهندسة الهذولية وذلك بأخذ نقيض البديهية الخامسة لاقليدس في شكل ما.

بما ان بديهية بليفر هي احدى مكافئات البديهية الخامسة فأن النقيض يكون بالشكل التالي : (من نقطة لا تقع على مستقيم معلوم يمكن رسم اكثر من موازي واحد لايقطع المستقيم المعلوم).

<u>بديهية التوازي الهذولية Hpp</u>

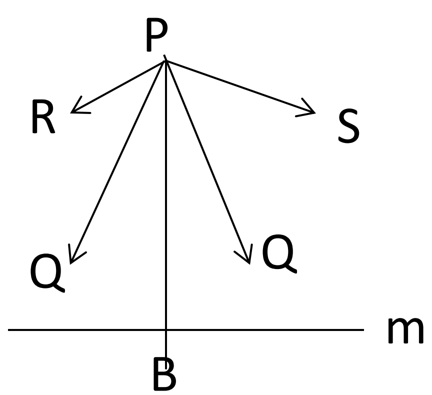
اذا كانت p نقطة لا تقع على مستقيم معلوم m فانه يوجد شعاعان فقط وليكن $\underrightarrow{PR}$ و $\underrightarrow{PS}$ بحيث ان :

1. $\underrightarrow{PR}$ و $\underrightarrow{PS}$ شعاعين غير متعاكسين
2. $\underrightarrow{PR}$ و $\underrightarrow{PS}$ لايقطعانm
3. اي شعاع $\underrightarrow{PQ}$ يقطع m اذاوفقط اذا $\underrightarrow{PQ}$ يقع بين $\underrightarrow{PR}$ و $\underrightarrow{PS}$.
4. كل من الشعاعين $\underrightarrow{PR}$ و $\underrightarrow{PS}$ المذكورين في *Hpp*يدعى موازي الى m من p

مبرهنة (67) :

اذا كان الشعاع يقع بين شعاع موازي لمستقيم معلوم وشعاع يقطع المستقيم المعلوم فأنه يقطع المستقيم المعلوم .

البرهان :



ليكن $\underset{PR}{\rightarrow}$ و $\underset{PS}{\rightarrow}$ شعاعين يوازيان خط m من نقطة P . وان B اي نقطة على m و $\underset{PQ}{\rightarrow}$ اي شعاع يقع بين $\underset{PR}{\rightarrow}$ و $\underset{PB}{\rightarrow}$ يجب ان نبرهن ان $\underset{PQ}{\rightarrow}$ يقطع m.

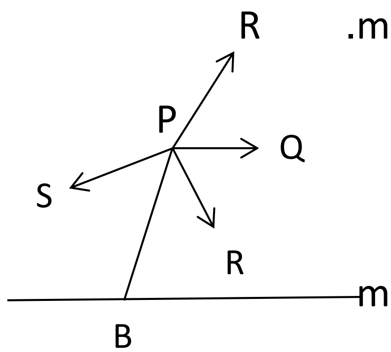
بما ان $\overline{PB}$ وقطع m فإن من Hpp، $\overline{PB}$ يقع بين $\overline{PR}$ و $\overline{PS}$ وبما ان $\overline{PQ}$ يقع بين $\overline{PR}$ و $\overline{PB}$ فإنه من مبرهنة (اذا كان $\overline{AE}$ يقع بين $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ وان $\overline{AE}$ يقع بين $\overline{AD}$ و $\overline{AC}$ فإن $\overline{AE}$ يقع بين $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$)

$\overline{PQ}$ يقع بين $\overline{PR}$ و $\overline{PS}$ ومن Hpp، $\overline{PQ}$ يقطع m وبالمثل اذا كان $\overline{PQ}$ يقع بين $\overline{PS}$ و $\overline{PB}$.

مبرهنة (68) :

اذا كان $\overline{PQ}$ لا يقطع مستقيم m لكن اي شعاع يقع بين $\overline{PQ}$ و $\overline{PB}$ حيث ان نقطة B نقطة على m فإن $\overline{PQ}$ يوازي المستقيم m.

البراهان:



ليكن m مستقيماً، P نقطة لا تقع على m و $\overline{PQ}$ شعاع لا يقطع m.

من Hpp $\longleftarrow$ يوجد شعاعان $\overline{PR}$ و $\overline{PS}$ من P ويوازيان m.

من المفرض $\longleftarrow$ Q وB و P لا تقع على مستقيم واحد

$\longleftarrow$ Q لا تقع على المستقيم PB

$\longleftarrow$ تقع Q غي احدى جهتي PB

من Hpp $\longleftarrow$ $\overline{PR}$ و $\overline{PS}$ في الجهتين المتعاكستين للمستقيم PB

$\longleftarrow$ اما تقع Q في جهة $\overline{PB}$ التي تحتوي R او في جهة $\overline{PB}$ التي تحتوي S.

نفرض ان Q تقع في جهة $\overline{PB}$ التي تحتوي R.

اما $\overline{PR}$ يقع بين $\overline{PB}$ و $\overline{PQ}$ و $\overline{PQ}$ يقع بين $\overline{PB}$ و $\overline{PR}$ او $\overline{PQ}$ =$\overline{PR}$

اذا كان $\overline{PR}$ يقع بين $\overline{PB}$ و $\overline{PQ}$ فمن الفرض $\overline{PR}$ يقطع m وهذا يخالف HPP.

اما اذا كان $\overline{PQ}$ يقع بين $\overline{PR}$ و $\overline{PB}$ فمن مبرهنة (67)، $\overline{PQ}$ يقطع m وهذا سخالف الفرض.

لذا فأن $\overline{PR}$ =$\overline{PQ}$ وبنفس الطريقة اذا كانت Q في جهة $\overline{PB}$ التي تحتوي على S.

مبرهنة (69) :

اذا كانت نقطة Q هي اثر العمود النازل من نقطة P على مستقيم معلوم m و$\overline{PR}$ و $\overline{PS}$ الموازيان من P الى m فإن $<RPQ \cong <SPQ$

مبرهنة (70) :

اذا كانت نقطة Q هي اثر العمود النازل من نقطة P على مستقيم معلوم m و$\overline{PR}$ و $\overline{PS}$ هما الشعاعان الموازيان للمستقيم m من P فإن $<RPQ$ و$<SPQ$ زاويتان حادتان.

البرهان:

نفرض ان العبارة من مبرهنة (69) $\longrightarrow$ $<RPQ \cong <SPQ$

نفرض انهما زاويتان قائمتان فإن $\overline{PR}$ و $\overline{PS}$ شعاعان متعاكسان وهذا يناقض Hpp.

اذا كانتا زاويتين منفرجتين فإنه يوجد شعاع $\overline{PE}$ في داخل $<SPQ$ او $<RPQ$ يصنع زاوية قائمة.

من مبرهنة (67) $\longrightarrow$ $\overline{PE}$ يقطع m وهذا يناقض مبرهنة (اذا قطع مستقيمين بقاطع وكانت الزاويتان الداخليتان في نفس الجهة من القاطع متكاملتين فإن المستقيمين لا يتقاطعان).

لذلك فإن الزاويتين يجب ان تكونا حادتين.

الهندسة الاهليليجية

Elliptic Geometry

البديهية المميزة للهندسة الاقليدية تنص على انه من نقطة معلومة يمكن رسم موازي واحد فقط لمستقيم معلوم.

من ناحية اخرى المظهر المميز للهندسة المستوية الهذلولية هو الفرض بوجود اكثر من موازي واحد للمستقيم من نقطة معلومة من هنا تأتينا فرضية ثالثة هي لايمكن رسم خط من نقطة معلومة ويوازي خطا معلوما هذه هي البديهية المميزة للهندسة الاهليجية , ان اول من اشار الى هذه البديهية التي هي تناقض بديهية التوازي لأقليدس هو العالم الالماني برنهارد ريمان في عام 1853.

تكون الكرة نموذج لهذه الهندسة حيث نقاط الكرة ودوائرها العظمى تمثل نقاط او مستقيمات هذه الهندسة.

وبما ان الدوائر العظمى تتقاطع دائما فأن المستقيمين يتقاطعان دائما ولذلك لا توجد مستقيمات موازية للمستقيم .

أنواع الهندسة الاهليليجة:

1. الهندسة الاهليليجة الأحادية *Single Elliptic Geometry*(نصف الكرة).
2. الهندسة الاهليليجة المزدوجة *Double Elliptic Geometry*(كرة كاملة).

جائت التسمية احادي ومزدوجة من الحقيقة بأن اي مستقيمين يتقاطعان بنقطتين في الهندسه لاهليليجيه المزدوجة وفي نقطة واحدة فقط في الهندسة الأهليجية الأحادية .

مبرهنة (71) :

العمودان على نفس المستقيم يتقاطعان في نقطة.

البرهان:

نستنتج من هذه المبرهنة من البديهية المميزة لهذه الهندسة حيث ان الخطين في المستوي يتقاطعان دائما.

من المناسب ان نفكر بأن سطح الارض هو كرة تامة . خطوط الطول هي نماذج للخطوط العمودية على خط الاستواء وبما ان كل هذه الخطوط تتقاطع في القطبين الشمالي والجنوبي توضحها في المبرهنة التالية.

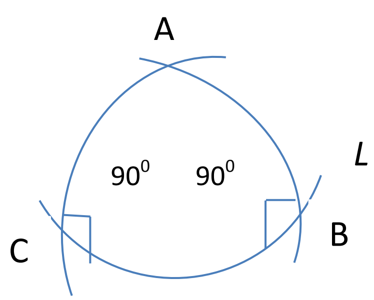
مبرهنة (72) :

الأعمدة على كل النقاط لمستقيم تلتقي في نقطة تدعى قطب الخط وبالعكس كل مستقيم كل مستقيم يمر بالقطب يكون عموديا على المستقيم المسافة q من قطب مستقيم للمستقيم هي المسافة القطبية للمستقيم .

مبرهنة (73) :

مجموع زاوية المثلث هو اكبر من $180°$

البرهان:



لتكن B,C نقطتين مختلفتين على مستقيم L نرسم

مستقيمين عوديين على L من BوC

يتقاطع هذان المستقيمان في نقطة A.

ولذلك مجموع زوايا المثلث ABC هو اكبر من $180°$.

جدول لمقارنة الهندسية الاقليدية والهندسية اللاأقليدية

	الاقليدية	الهذولولية	الأهليليجية
يتقاطع المستقيمان في	نقطة واحدة في الاكثر	نقطة واحدة على الاكثر	نقطة واحدة(الاحادية)نقطتان (المزدوجة)
ليكن مستقيم LوP نقطة لا تقع على L فأنه	يوجد موازي واحد وواحد فقط للمستقيم LمنP	يوجد للمستقيم LمنP	لايوجد الى LمنP
يفصل المستقيم الى نصفين	بواسطة نقطة	بواسطة نقطة	لا ينفصل
اذا قطع مستقيم واحد مستقيمين متوازيين فأنه	يقطع الاخر	قد يقطع أو لا يقطع	______________
عمودان على نفس المستقيم بكونان	متوازيين	غير متوازيين	متقاطعان
مجموع زوايا المثلث	يساوي زاويتان قائمتان	أقل من زاويتان قائمتان	اكثر من زاويتان قائمتان