(1)

Numerical Integration :-

- Numerical integration is used to determine definite integrals that can not be solved by analytical methods

ان الصيغة العامة للتكامل المحدد هي :

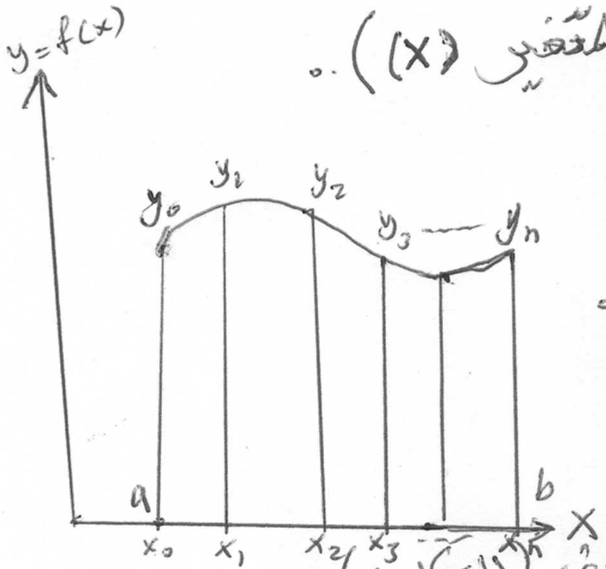
$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

حيث ان a و b قيمتان محددتان وان f(x) هي دالة مستمرة للمتغير X الذي يأخذ قيم $a \le X \le b$.

- يستخدم التكامل العددي لحساب قيم التكاملات المحددة (definite integrals) والتي لا يمكن حلها باستخدام الطرق التحليلية .

Methods of integration :-

(1) Trapezoidal method :-



- المنحني يمثل الدالة $y=f(x)$ (وهي دالة للمتغير (X)) ..
- اذا اردنا ان نكامل هذه الدالة خلال الفترة من a الى b :

$$I=\int_a^b f(x)\,dx \,.$$

فإننا نقسم فترة التكامل {من a الى b} الى اجزاء متساوية عددها (n) وطول كل منها (h) حيث :

$$h=\frac{b-a}{n}$$

- في الشكل اعلاه تكون المساحة تحت المنحني (التكامل) عبارة عن مجموعة من مساحات اشباه المنحرف ، وهذا يعطي قيمة تقريبية للتكامل .
- كلما كان عدد اشباه المنحرف اكبر (n اكبر) ، وكلما كانت الدقة في قيمة التكامل اكبر

②

- قيمة التكامل للدالة هي مجموع مساحات اشباه المنحرف تحت منحني الدالة .

$$I = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})\right] \quad \text{--- } (1)$$

خوارزمية الحل :-

لاستخراج قيمة التكامل لدالة معينة $f(x)$ فاننا نقوم بالخطوات التالية :-

① تقسيم فترة التكامل الى (n) من الاجزاء واستخراج طول كل جزء h، حيث :

$$h = \frac{b-a}{n}$$

② عمل جدول بالشكل التالي

حيث تزيد كل قيمة لـ x عن القيمة التي تسبقها بالمقدار h اي $x_{i+1} = x_i + h$.

x_i	$y_i = f(x_i)$
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
⋮	⋮

③ استخدام قيم (x_i)، (y_i) التي حصلنا عليها في الجدول في المعادلة (1) لاستخراج قيم التكامل .

④ قيم (x_i) في الجدول تبدأ من قيمة ($x = a$) وتنتهي بالقيمة ($x = b$)، حيث a، b تمثلان حدود التكامل :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx .$$

(3)

Example:- Determine the value of $\int_1^3 (2x^2 - x + 1)\,dx$ with $n = 4$ By Trapezoidal method.

Solution

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = 0.5$$

x_i	$f(x_i) = 2x_i^2 - x_i + 1$
1	2
1.5	4
2	7
2.5	11
3	16

$$I = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_4 + 2(y_1 + y_2 + y_3)\right]$$

$$= \frac{0.5}{2}\left[2 + 16 + 2(4 + 7 + 11)\right]$$

$$I = 15.5$$

$$\therefore \int_1^3 (2x^2 - x + 1)\,dx = 15.5$$

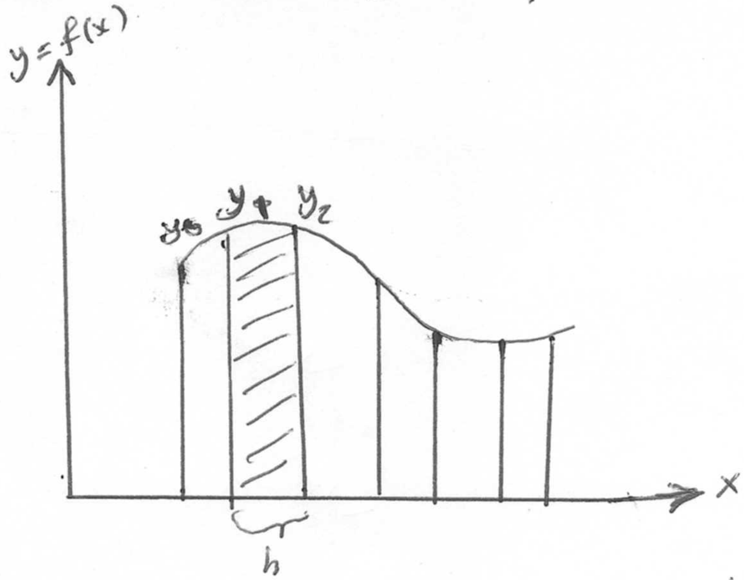
Exercise:

By Trapezoidal method, find the value of

$\int_1^7 x \ln x \, dx$ where $n = 6$?

② Simpson's method :-

- تعتبر هذه الطريقة ادق من الطريقة السابقة، حيث يتم هنا اعتماد عدد من المنحنيات من الدرجة الثانية بدلاً من الخط المستقيم في طريقة شبه المنحرف



- لو اخذنا اي شريحة من الشكل المجاور فانه يمكن ملاحظة الفرق بين تقريب شبه المنحرف واسلوب المنحني الذي هو اقرب الى تمثيل الدالة

- بصورة عامة يعطى التكامل على عدد (n) كما يلي :

$$I = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}) \right]$$

ملاحظة : في هذه الطريقة من التكامل يجب ان تكون قيمة (n) زوجية .

Example:- Use Simpson's method to evaluate

$$\int_0^2 x^2 e^{-x^2}\,dx \text{, with } n=8.$$

Solution:- $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{8} = \frac{1}{4} = 0.25.$

x_i	$f(x_i) = x_i^2 e^{-x_i^2}$	
0	0	y_0
0.25	0.0587	y_1
0.5	0.1947	y_2
0.75	0.3205	y_3
1	0.3679	y_4
1.25	0.3275	y_5
1.5	0.2371	y_6
1.75	0.1432	y_7
2	0.0733	y_8

$$I = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_8 + 2(y_2 + y_4 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7)\right]$$

$$= \frac{0.25}{3}\left[0 + 0.0733 + 2(0.1947 + 0.3679 + 0.2371) + 4(0.0587 + 0.3205 + 0.3275 + 0.1432)\right]$$

$I = 0.4227$ $\quad \therefore \int_0^2 x^2 e^{-x^2}\,dx = 0.4227$

Exercise:- Find the approximate value of the following integration $\int_{-2}^{2} x^2 e^{x}\,dx$, where $n=6$?