1

Numerical Solution of Ordinary Differential Equations

* سيتم تناول المعادلات التفاضلية الاعتيادية {تحتوي على متغير مستقل واحد (X)} ومن المرتبة الاولى {اي تحتوي على المشتقة الاولى فقط}
* الصيغة العامة لهذه المعادلات : $dy/dx = F(x,y)$.
* في هذه المسائل يتم اعطاء قيمة ابتدائية لكل من (X) و (y)، اي (X_0) ، (y_0) والمطلوب هو استخراج القيم اللاحقة للدالة y عندما يتم اعطاء ~~قيم~~ قيم لاحقة للمتغير X اي :-

X_i	y_i	
X_0	y_0	قيم اوليه تعطى في السؤال
X_1	y_1	قيم لاحقة يتم حسابها بالاعتماد على الطريقة المتبعة
X_2	y_2	
X_3	y_3	
⋮	⋮	

هنالك عدة طرق عددية لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية :-

1 Euler method :-

$$\left.\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h\,F(x_i, y_i) \\ x_{i+1} &= x_i + h \end{aligned}\right\} \text{Euler general formula.}$$

$i = 0, 1, 2, 3, \ldots$

ملاحظات :-

- لدينا دائما نقطة ابتدائية (x_0, y_0) تعطى في السؤال .
- السؤال يطلب استخراج قيمة y (الدالة) انطلاقاً من القيمة الاولية (y_0) عند $X = X_0$ ، وصولاً الى قيمة نهائية (y_n) عند $X = X_n$ (قيمة X_n تعطى في السؤال) .
- التحرك من $X = X_0$ الى $X = X_n$ يتم من خلال خطوات ΔX ، حيث $\Delta x = h$.
- في هذه الطريقة يتم حساب كل قيمة لـ y وذلك بالاستفادة من قيمة y السابقة و X السابقة .

②

<u>Example:</u>- Use Euler method to approximate $y(x)$ for the differential equation : $dy/dx = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$ from $x=0$ to $x=1.5$, with $h=0.25$, Given that $y(0)=1$.

<u>Solution:</u>

$x_0 = 0$, $y_0 = 1$ القيم الابتدائية لـ (x,y) هي -

قيمة $x_n = 1.5$ ، $h = 0.25$. -

باستخدام القانون: $y_{i+1} = y_i + h\,F(x_i, y_i)$ -

$i = 0, 1, 2, \dots$

$\underline{\underline{i=0}}$

$$y_1 = y_0 + h\left(-2x_0^3 + 12x_0^2 - 20x_0 + 8.5\right)$$
$$= 1 + 0.25(8.5) \Rightarrow y_1 = 3.125$$
$$x_1 = x_0 + h \Rightarrow 0.25$$

$\underline{\underline{i=1}}$

$$y_2 = y_1 + h\,F(x_1, y_1)$$
$$y_2 = 3.125 + 0.25\left(-2(0.25)^3 + 12(0.25)^2 - 20(0.25) + 8.5\right)$$
$$\therefore y_2 = 4.1797 , \quad x_2 = x_1 + h \Rightarrow x_2 = 0.5$$

$\underline{\underline{i=2}}$

$$y_3 = 4.4922 , \quad x_3 = x_2 + h \Rightarrow x_3 = 0.75$$

$\underline{\underline{i=3}}$

$$y_4 = 4.4922 + 0.25\left(-2(0.75)^3 + 12(0.75)^2 - 20(0.75) + 8.5\right)$$
$$\therefore y_4 = 4.3438 , \quad x_4 = x_3 + h \Rightarrow x_4 = 1$$

$\underline{\underline{i=4}}$

$$y_5 = 4.3438 + 0.25\left(-2(-1)^3 + 12(1)^2 - 20(1) + 8.5\right)$$
$$y_5 = 4.2188 , \quad x_5 = x_4 + h , \quad x_5 = 1.25$$

3

$\underline{i=5}$

$$y_6 = 4.2188 + 0.25\left(-2(1.25)^3 + 12(1.25)^2 - 20(1.25) + 8.5\right)$$

$$y_6 = 3.8047 \;,\; x_6 = x_5 + h \Rightarrow x_6 = 1.5$$

ملاحظة: لمعرفة عدد خطوات الحل مسبقاً يمكن الاستفادة من القيمة الاولية والنهائية (x_n , x_0) للمتغير x حيث:

$$n = (x_n - x_0)/h \Rightarrow n = \frac{1.5 - 0}{0.25} = 6$$

* كلما كانت (h) اصغر كلما كان الحل ادق.

Exercise Use Euler method to approximate $y(2)$ from the differential equation:

$$dy/dx = x - y^2 \;,\; \text{given that } y(0) = 0.75,$$

$h = 0.25$.

④

② Runge-Kutta 2nd order method :-

Consider an ordinary differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

with initial condition

$$y(0) = y_0$$

the general formula of the Runge-Kutta 2nd order method is :

$$y_{i+1} = y_i + K_2 h$$

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + \tfrac{1}{2}h,\ y_i + \tfrac{1}{2}K_1 h)$$

$$i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Example : $\dfrac{dy}{dx} = \underbrace{3e^{-x} - 0.4y}_{f(x,y)}$, $y(0) = 5$, Find $y(3)$ when $h = 1.5$.

Solution :-

$i = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 5$, $f(x,y) = 3e^{-x} - 0.4y$

$$K_1 = f(x_0, y_0) = f(0,5) = 3e^{-0} - 0.4(5) = 1$$

$$K_2 = f(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}K_1 h)$$

$$= f\left(0 + \frac{1.5}{2},\ 5 + \frac{1.5}{2}\right)$$

$$= f(0.75, 5.75) = 3e^{-0.75} - 0.4(5.75)$$

$$= -0.8829$$

$$y_1 = y_0 + K_2 h = 5 + (-0.8829)(1.5)$$

$\boxed{y_1 = 3.676}$, $x_1 = x_0 + h = 0 + 1.5 = \boxed{1.5}$

5

$\underline{i=1}$ $x_1 = 1.5, \quad y_1 = 3.676$

$$K_1 = f(x_1, y_1) = f(1.5, 3.676)$$

$$= 3e^{-1.5} - 0.4(3.676) = -0.8009$$

$$K_2 = f(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}K_1 h)$$

$$= f\left(1.5 + \frac{1.5}{2}, 3.676 + \frac{1}{2}(-0.8009 * 1.5)\right)$$

$$= f(2.25, 3.075) = 3e^{-(2.25)} - 0.4(3.075)$$

$$= -0.9138$$

$$y_2 = y_1 + K_2 h$$

$$= 3.676 + (-0.9138)(1.5)$$

$$\boxed{y_2 = 2.304}, \quad x_2 = x_1 + h = 1.5 + 1.5 = \boxed{3}$$

Exercise:-

Solve the following differential equation to approximate $y(2)$:

$$\frac{dy}{dx} = xy - x^2 + \sqrt{x}$$

with initial condition

$y(0) = 4$

when $h = 0.5$.