Chapter 4: Interpolation

يستخدم الاستكمال مع البيانات المجدولة ، كما موضح في المثال :

x	1	2	3	4	---
y	0.3	0.5	1	3	---

حيث لا تتوفر صيغة رياضية للدالة $\{y = f(x)\}$

* للتعرف على قيمة y التي تقابل $x = 2.5$ مثلاً ، فاننا نلجأ الى طريقة الاستكمال (interpolation).

* y : المتغير المعتمد dependent variable.
x : المتغير المستقل independent variable.

* في الاستكمال يتم استخدام البيانات المتوفرة لصياغة متعددة حدود (polynomial) $[P_n(x)]$ والتي تمثل الدالة $y = f(x)$ بصيغة متعددة حدود.

* عدد الحدود في المتسلسله يعتمد على نقاط البيانات (x, y) المستخدمة.

* في حالة استخدام $(n+1)$ من النقاط البيانية ، فاننا نحصل على متسلسله من الدرجة (n) $[P_n(x)]$ والتي تمر بجميع النقاط التي تكونها (نقاط الجدول) (x, y).

Lagrange Interpolation :-

* صيغة المتسلسله $P_n(x)$:

* The form of the polynomial $P_n(x)$:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i \quad \text{------ (1)}$$

* على سبيل المثال : بالنسبة للجدول اعلاه ، لدينا اربع نقاط [اي اربعة ازواج من (x, y)] ، فنحصل على :

$$P_3(x) = L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1 + L_2(x)\, y_2 + L_3(x)\, y_3$$

* لاستخدام هذه المتسلسله [eq-(1)] يجب استخراج المعادلات $L_i(x)$.

$L_i(x)$: Lagrange polynomials.

Eq-(1) : Lagrange interpolation formula.

* $L_i(x)$ is given as:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \text{------} \quad (2)$$

* For example, if $n = 2$ (three points)

i	x	y
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2

* Using eq. (1)

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x)\, y_i ,$$

$$P_2(x) = L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1 + L_2(x)\, y_2$$

* To find $L_i(x)$, using eq. (2)

(1) For $i = 0$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$L_0(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) * \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\right)$$

(2) For $i = 1$

$$L_1(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) * \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right)$$

(3) For $i = 2$

$$L_2(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\right) * \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)$$

Example: Use Lagrange interpolation to estimate $y(1.22)$ if $y(1.2) = 0.3849$, $y(1.3) = 0.4032$?

Solution:-

$n = 1$

i	x	y
0	1.2	0.3849
1	1.3	0.4032

$\boxed{1.22} \longrightarrow$

$$P_1(x) = L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1$$

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 1.3}{1.2 - 1.3}$$

$$L_0 = \frac{x - 1.3}{(-0.1)} = \frac{x}{-0.1} + \frac{1.3}{0.1}$$

$$L_0 = -10x + 13$$

$$L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$L_1 = \frac{x - 1.2}{1.3 - 1.2} = \frac{x - 1.2}{0.1} \Rightarrow L_1 = 10x - 12$$

$$\therefore P_1(x) = (-10x + 13) * (0.3849) + (10x - 12) * (0.4032)$$

$$P_1(x) = -3.849x + 5.0037 + 4.032x - 4.8384$$

$$P_1(x) = 0.183x + 0.1653$$

This equation may be used to find the value of y at $x = 1.22$

$$y(1.22) = P_1(1.22) = 0.183 * (1.22) + 0.1653$$

$$\therefore y(1.22 = 0.38856$$

$\therefore$ The interpolated point (x, y) is: $x = 1.22$, $y = 0.38856$

Exercise: Use Lagrange interpolation to estimate $y(3)$ if $y(2) = 0.5$, $y(2.5) = 0.4$, $y(4) = 0.25$?