Prof.Dr. Hayfa G. Rashid 2021

Complex Integrals

الفصل الثاني

المحاضرة الرابعـة

✓ التكاملات الخطية العقدية (Complex line integral)

Liouvalli theorem (a)

Morera's theorem (b)

✓ تكاملات كوشي (Cauchy's integral)

From " Calculus " , the integration say for example

- $\int_0^1 f(x)dx$, dx with be varied from $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.
- $\int_2^3 f(y)dy$, dy with be varied from $y_1 = 2$, $y_2 = 3$.
- $\int_{1,2}^{3,4} (3xy + y^2)dx + (2x^2y - yx + x^2)dy$,

هنا التكامل يتضمن دوال معتمدة على x و y . هذه جميعا " تكاملات خطية " ولابد ان توجد علاقة تربط y مع x ، على سبيل المثال :

1. $y = 2x$ straight line equation
2. $y = x^2$ parabola equation

ففي الحالة الاولى $y = 2x$ يتم اعطاء قيم y مباشرة او قيمة x حيث نعوض عن y او x بما يساويها فتتحول المعادلة بدلالة بعد واحد ، أما :

$$dy = 2dx$$

$$dy = 2xdx$$

الحالة الثانية ، يتم تحديد " نقطتان " في السوال ضمن المعطيات ومن خلال القيمتين يتم ايجاد قيمة أما y أو x عن طريقة معادلة الخط المستقيم و ايجاد الميل وكالاتي :

Along the striagt line joining the points (1,2) → (3,4)

بحيث يكون C هو المستقيم الواصل بين النقطتين (1,2) → (3,4) ، أي

$$slope = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$m = 1$$

من معادلة (ميل + نقطة) ،

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$y - 2 = (1)(x - 1)$$

$$\therefore \quad y = x + 1 \;\rightarrow dy = dx$$

Complex line integral التكاملات الخطية العقدية

Previous lecture ,

Complex function $\quad w = f(z) = U(x,y) + i\,V(x,y)$

Since , $\quad z = x + iy$

Let , $\quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y \quad$,or $\quad dz = dx + idy$

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)(dx + idy)$$

$$\therefore \quad \underbrace{\int_C f(z)dz = \int_C udx - \int_C vdy}_{\text{Real part of line integral}} + \underbrace{i\int_C udy + i\int_C vdx}_{\text{Imaginary part of line integral}}$$

Example 1 Evaluate the integral $\int_{(1,1)}^{(2,8)} (x^2 - iy^2)dz \;\; where \;\; y = 2x^2$

Solution

$$\int_{(1,1)}^{(2,8)} (x^2 - iy^2)dz \;=\; \int_{(1,1)}^{(2,8)} (x^2 - iy^2)(dx + idy)$$

$$= \int_{(1,1)}^{(2,8)} x^2dx + \int_{(1,1)}^{(2,8)} y^2dy + \boldsymbol{i} \int_{(1,1)}^{(2,8)} x^2dy - \boldsymbol{i} \int_{(1,1)}^{(2,8)} y^2dx$$

$$\because \quad y = 2x^2 \quad \rightarrow dy = 4xdx$$

$$y^2 = 4x^4$$

Substitute in integration equation

$$\int_{(1,1)}^{(2,8)} (x^2 - iy^2)dz = \int_1^2 x^2dx + \int_1^2 16x^5dx + \boldsymbol{i} \int_1^2 4x^3dx - \boldsymbol{i} \int_1^2 4x^4dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\bigg|_1^2 + \frac{16x^6}{6}\bigg|_1^2 + \boldsymbol{i}x^4|_1^2 - \boldsymbol{i}\frac{4x^5}{3}\bigg|_1^2$$

$$\int_{(1,1)}^{(2,8)} (x^2 - iy^2)dz = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1024}{6} - \frac{16}{6}\right) + i(16 - 10 - i(\frac{128}{5} - \frac{4}{5})$$

$$\int_{(1,1)}^{(2,8)} (x^2 - iy^2)dz = \frac{511}{3} + \boldsymbol{i}\frac{49}{5}$$

ملاحظة : يمكن التعبير عن المتغيرين x و y كدوال بمتغير واحد لنقل t والذي يسمى " وسيطا " بين المتغير x و y كما موضح في المثال التالي .

Example 2 Evaluate the integral $\int_C z^2dz$ where C is striaght line joining the points : (0,0) → (2,1) ,where C: $Z(t) = x(t) + iy(t)$

Solution

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{"straight line equation"}$$

$$slope = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0)$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}x \ \rightarrow x = 2y$$

ومن الواضح ان x ، y هما دالتين للمتغير t (حسب ماورد في السوال) وعليه يمكن ان نفترض :

Let , $y = t \quad \rightarrow x = 2t$ then $0 \le t \le 1$

$$\therefore \quad C \ : \quad z(t) = 2t + it \qquad 0 \le t \le 1$$

$$dz = 2dt + idt$$

Or ,

$$dz = (2 + i)dt$$

Now ,

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (2t + it)^2 \, (2 + i)dx$$

$$= (2 + i)\int_0^1 (4t^2 + 4t^2 i - t^2)dt$$

$$= (2 + i)\int_0^1 (3t^2 + i4t^2)dt$$

$$\int_C z^2 dz = (2 + i)\left[t^3 + \frac{4}{3}it^3\right]\Big|_0^1 = (2 + i)(1 + i\frac{4}{3})$$

$$\int_C z^2 dz = \frac{2}{3} + i\frac{11}{3}$$

Activity :

If we choose $y = \frac{t}{2} \quad , x = t \qquad \ldots$ *continue*

Example 3 Evaluate the integral $\int_C \ z^2 dz$ where path equation C is
$Z(t) = t + it^2 \qquad 0 \ \le t \le 1$

Solution

$$Z(t) = t + it^2$$

$$\therefore \quad dz = dt + i\,2tdt$$

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (t+it^2)(1+2it)dt \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

$$= \frac{(t+it^2)^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1+i)^3 = \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} i$$

$$\int_C z^2 dz = \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} i$$

Cauchy-Goursat theorem نظرية كوشي ــكورسات

The Cauchy–Goursat Theorem

Suppose that a function *f* is analytic in a simply connected domain *D*. Then for every simple closed contour *C* in *D*,

$$\oint_C f(z)\, dz = 0.$$

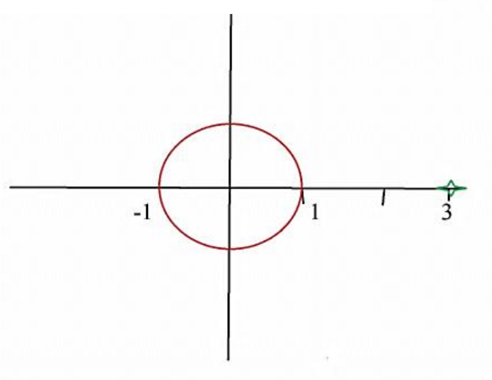
لتكن $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة ما $\mathcal{R}$ وكذلك على حدودها C او اذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في كل نقطة على وداخل منحني مغلق بسيط C فان :

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Example 4 If C is a circle $|z| = 1$, prove that $\oint_C \frac{z^2}{z-3} dz = 0$

Solution

$$f(z) = \frac{z^2}{z-3} \quad , \quad z_0 = 3$$

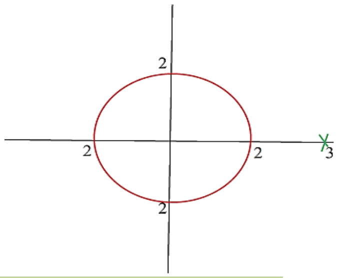


z_0 تمثل نقطة او قطب (شاذ) ، اي ان الدالة تحليلية لجميع النقاط في المستوى العقدي عدا النقطة $z_0 = 3$, لانها تقع (خارج الدائرة $|z| = 1$) وعليه فان قيمة التكامل تساوي صفر .

ملاحظــة : الدالة العقدية هي $\frac{z^2}{z-3}$ كما موضح في السؤال .

Example 5 If C is $|z| = 2$, evaluate $\int \frac{1}{z-3} dz$

Solution

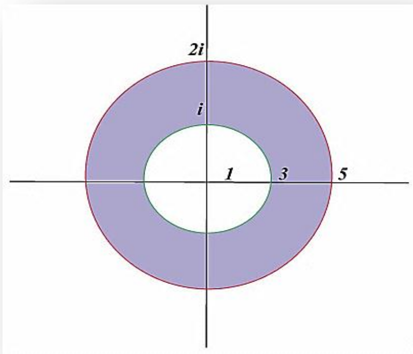


$\int \frac{1}{z-3} dz$, not define at $z = 3$ not in $C : |z| = 2$, hence

$\int \frac{1}{z-3} dz = 0$

Example 6 Find the integral $\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+4)}$ where C is $3 \leq |z| \leq 5$,

Solution



$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+4)}$

$$(z-1)^2 = 0 \rightarrow \boldsymbol{z = 1}$$

$$z^2 + 4 = 0 \rightarrow z^2 = -4 \rightarrow \boldsymbol{z = \mp 2i}$$

اذن الدالة تحليلية في جميع نقاط المستوى العقدي عدا النقاط

$$\boldsymbol{z = 1 \ , \ z = +2i \ , z = -2i}$$

وجميعها **خارج المنطقة** وعليه فان **قيمة التكامل تساوي صفر** .

نظرية موريرا (Morera's Theorem)

وهي عكس نظرية كوشي – ريمان وتنص على الاتي :

أذا كانت $f(z)$ دالة مستمرة في المنطقة $\mathcal{R}$ وان $\oint f(z)dz = 0$ حيث C هو منحني بسيط مغلق عندئذ تكون $f(z)$ دالة تحليلية في المنطقة $\mathcal{R}$.

نظرية ليوفيل (Louvelli's Theorem)

اذا كانت $f(z)$ دالة كلية (Entire function) ومحددة لكل قيم z في المستوى العقدي عندئذ تكون $f(z)$ دالة ثابتة او بعبارة اخرى ، افرض ان $f(z)$ دالة تحليلية محددة اي ان $|f(z)| < M$ لثابت ما M لجميع قيم z في المستوى العقدي الشامل ، ينتج ذلك ان $f(z)$ يجب ان تكون ثابتة .

صيغ كوشي التكاملية (Cauchy's integral formulas)

يمكن تقسيمها الى قسمين هما :

(1) ذات القطب البسيط (Simple pole)

(2) ذات القطب المتعدد (Multipole pole)

اذا كانت $f(z)$ تحليلية على المنحني البسيط C وداخلها وان z_0 اي نقطة داخل C والحركة عكس عقرب الساعة (تكون موجبة) فان :

$$(1)\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = 2\pi i f(z)$$

$$(2)\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^n(z)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad (n = 0,1,2,\dots.)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz \qquad (n = 1,2,\dots.)$$

Example 7 Evalute $\oint_C \frac{e^z}{(z-1)}dz\,,\quad c\,:\,|z| = 2$

Solution

$$z_0 = 1$$

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)}dz = 2\pi i f(z_0)$$

$$f(z) = e^z \;\to\; f(z_0) = e^{z_0} = e^1$$

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)}dz = 2\pi\, i e^1$$

Example 8 Evalute $\oint_C \frac{\cos z}{(z+\pi)}dz\,,\quad c\,:\,|z| = 3$

$$f(z) = \cos z\,,\quad z_0 = -\pi\,, f(z_0) = \cos(-\pi)$$

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z+\pi)}dz = 2\pi i\cos(-\pi) = -2\pi i$$

Example 9 Evalute $\oint_C \frac{e^z}{z^2}dz\,,\quad c\,:\,|z| = 2$

$$f(z) = e^z\,,\quad z_0 = 0\,, f(z_0) = f(z) = e^{z_0} = e^0 = 1$$

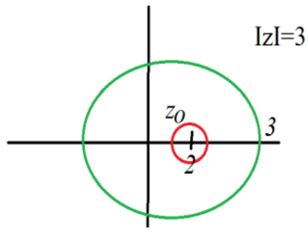
$$\oint_C \frac{e^z}{z^2}dz = 2\pi i(e^0) = 2\pi i$$

Example 10 Evalute $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz\,,\quad if\ c\ is : (a)\,|z| = 3\,, (b)\,|z| = 1$

$$(a)\,|z| = 3$$

$$z_0 = 2\,, f(z) = e^z\,, \qquad f(z_0) = e^2$$

$$\therefore \oint_C \frac{e^z}{z-2} dz = 2\pi i (e^2)$$

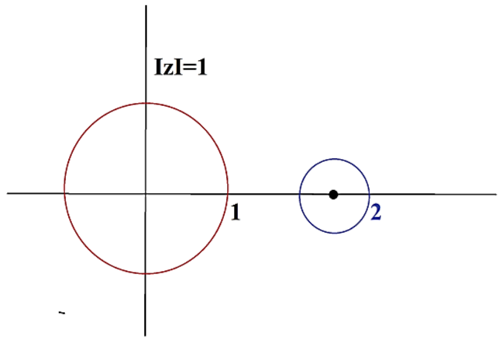


$$\therefore \frac{1}{2\pi i} \times 2\pi i (e^2) = e^2$$

$(a)\ |z| = 2$

وحسب نظرية كوشي كورسات $z_0 = 2$ ، فان

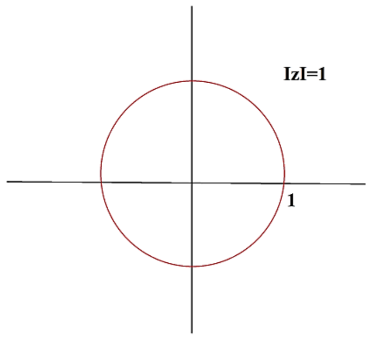
$$\therefore \oint_C \frac{e^z}{z-2} dz = 0$$



لان الدالة e^z تحليلية في جميع المناطق للمستوى العقدي ماعدا $z_0 = 2$ والتي تقع خارج المنحني $|z| = 1$.

Example 11 Evalute $\oint_C \frac{sin^2 z}{z-\pi/6} dz\ ,\ \ if\ \ c\ \ is:\ \ |z| = 1$

Solution



$$z_0 = \pi/6\ \ , f(z) = sin^2 z$$

$$\therefore f(z) = sin^2(\pi/6) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

$$\oint_C \frac{sin^2 z}{\sin(-\pi/6)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{64}\right) = \frac{\pi}{32} i$$

Example 12 Evalute $\oint_C \frac{sin\pi z^2 + cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz\ ,\ \ if\ \ c\ \ is:\ \ |z| = 3$

Solution

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

$$\oint_C \frac{sin\pi z^2 + cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz = \oint_C \frac{sin\pi z^2 + cos\pi z^2}{(z-1)} dz - \oint_C \frac{sin\pi z^2 + cos\pi z^2}{(z-2)} dz$$

$$f(z) = sin\pi z^2 + cos\pi z^2\ ,\ \ z_0 = 2\ ,\ \ z_0 = 1$$

$$f(z_0)_2 = sin\pi(2)^2 + cos\pi(2)^2 = 1$$
$$f(z_0)_1 = sin\pi(1)^2 + cos\pi(1)^2 = -1$$

Then,

$$\oint_C \frac{sin\pi z^2 + cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz = 2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i$$

لان $z_0 = 1$ ، $z_0 = 2$ داخل المنحني C .

Example 13 Evalute $\oint_C \frac{cosz}{(z-\pi)^5} dz$

Solution

Since

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^n(z_0)$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^n(z_0)$$

تمثل ما بداخل االدائرة مشتقة الدالة لـ $(n-1)$ من المرات و عليه ،

$$f^{(4)}(z_0) = -sinz \underset{1}{\rightarrow} -cosz \underset{2}{\rightarrow} sinz \underset{3}{\rightarrow} cosz \quad \textcircled{4}$$

$z_0 = \pi \quad , n = 4$

$$\oint_C \frac{cosz}{(z-\pi)^5} dz = \frac{2\pi i}{4*3*2*1} cos\pi = -\frac{\pi}{12} i$$

Example 13 Evalute $\oint_C \frac{e^z}{(z+1)^4} dz$ where c is a circle $|z| = 3$

Solution

$$f(z) = e^{2z} \quad , z_0 = -1 \quad , \quad n = 3$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^n(z_0)$$

$$f^{(3)}(z) = 8e^{2z} \quad , f^{(3)}(z_0) = f^{(3)}(-1) = 8e^{-2}$$

$$\therefore \oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz = \frac{2\pi i}{3*2*1} \times 8e^{-2} = \frac{8\pi i}{3} e^{-2}$$

Example 14 Evalute $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3}dz$ where c is a circle $|z| = 2$

Solution

$$z_0 = 0 \quad , \quad n = 3 \quad , \quad f(z) = e^{iz}$$

$$f'(z) = ie^{iz} \quad , \qquad f''(z) = -e^{iz} \quad , \qquad f''(z_0) = f''(0) = 1$$

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2*1}(-1) = -\pi i$$

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3}dz = -\pi i$$