الفصل الأول

الأنظمة البديهية (Axiomatic Systems)

يتكون النظام البديهي من

1- تعاريف 2- مجموعة البديهيات 3- مبرهنات

1- التعاريف : إن أي تعريف جيد لاي كلمة في الرياضيات يجب

أ- ان يعبر عنه ببساطة

ب- ان يكون غير دوري

ج- يصف بطريقة وحيدة الكلمة المراد تعريفها

فالبساطة تعني ان نعبر عن الكلمة المراد تعريفها بكلمات ابسط منها اي بكلمات معروفة فقد عرف اقليدس النقطة بانها ليست لها بعد والمستقيم له طول فقط وليس له عرض او سمك فالطول والعرض والسمك اصعب من الكلمة المراد تعريفها لذلك لا يمكن قبول من هذه التعاريف .

ويقصد بالدورية عند تعريف كلمة ما فأننا سنمر بسلسلة من التعاريف التي قد تنتهي بنفس الكلمة فمثلا اذا عرفنا المستقيم بانه مجموعة من نقاط ونعرف النقطة بانها تقاطع مستقيمين فان هذه العملية تكون دورية.

ويقصد بالوصف الوحيد ان التعريف الدقيق لكلمة ما يجب ان يصف هذه الكلمة بطريقة بحيث لا ينطبق هذا الوصف على كلمة اخرى فمثلا اذا عرفنا قلم الرصاص بانه اداة تستعمل للكتابة فان هذا التعريف يصف ايضا قلم الحبر وقلم الجاف لذلك لا يمكن قبول مثل هذه التعاريف .

لكي نتجنب هذه المشكلة نختار بعض الكلمات بدون تعريف لتكون كلمات اولية او كلمات غير معرفه (Undefined terms) وبدلالتها تعرف بقية الكلمات او المصطلحات في النظام .

تصنف الكلمات الاولية الى نوعين :

أ- الكلمات التقنية : (Technical Terms)

تختلف هذه الكلمات من موضوع الى موضوع اخر ففي الهندسة بصورة خاصة كمثال (النقطة والمستقيم , والتطابق ....) ربما تعتبر هذه الكلمات اولية في النظام المعطى ومن المحتمل في انظمة اخرى في الهندسة نختار كلمات اولية اخرى ، وكل مصطلح جديد يجب ان يعرف اما باستعمال الكلمات الاولية او المصطلحات التي عرفت بدلالتها. لذلك يجب ان توضع قائمة لكلمات اولية في بداية كل نظام .

ب- الكلمات المنطقية (Logical Terms)

مثل كل و لأي , بعض ,يوجد .... حيث يوجد عدد غير محدد من الكلمات المنطقية .

2- البديهيـــات Axioms

هي العبارات الاساسية التي نتقبلها بدون برهان وهي الحجر الاساس للبناء في النظام البديهي.

3- المبـرهنــات Theorems

هي النتيجة التي نحصل عليها من بديهيات النظام او من عبارات في هذا النظام .

* ان علم الهندسة هو نظام بديهي لأننا نستخدم مجموعة من (تعاريف,بديهيات ,مبرهنات)، وكمثال للنظام البديهي هو الهندسة الاقليدية .

المســتوي الاســقاطــي (Projective Plane)

سنكون مستويا اسقاطيا كمثال على نظام بديهي :

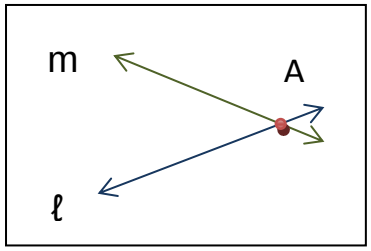
يتكون المستوى الاسقاطي π من مجموعة كلمات اولية تقنية [نقاط ونرمز لها بحروف كبيرة A,B,C... ومستقيمات ونرمز لها بحروف صغيرة ℓ , m,...] و البديهيات كما يلي :

1. أي نقطتين مختلفتين في π يحتويهما مستقيم واحد فقط .
2. كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل .
3. توجد في الاقل نقطة واحدة A ويوجد في الاقل خط واحد ℓ بحيث ان $A \notin \ell$.
4. أي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة على الاقل .

مبرهنة (1) : أي مستقيمين مختلفيـن فـي المسـتوى الاسـقـاطـي يشتركـان في نقطة واحدة فقط .

المعطيات : ليكن ℓ , m مستقيمين مختلفين في المستوي الاسقاطي π ، $\ell \neq m$.

المطلوب اثباته : ℓ , m يشتركان في نقطة واحدة فقط .



البرهان :

ليكن ℓ , m مستقيمين مختلفين في $\pi \Leftarrow \ell \neq m$

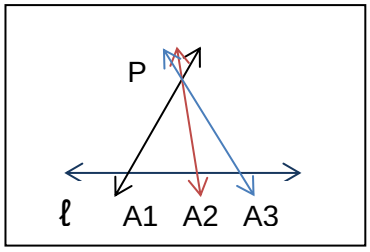
من البديهية (4) $\exists$ A s.t. $A \in \ell$, $A \in m$

نفرض انه توجد نقطة اخرى B تختلف عن A بحيث ان $B \in \ell$, $B \in m$

من البديهية (1) $\Leftarrow$ $\ell = m$ وهذا يتناقض الفرض

❖ ℓ , m يشتركان في نقطة واحدة فقط .

مبرهنة (2): أي نقطة في المستوى الاسقاطي هي عنصر لثلاثة مستقيمات في الأقل.



المعطيات : لتكن P أي نقطة في π .

المطلوب اثباته : يوجد ثلاث خطوط تمر بالنقطه p .

البرهان :

لتكن P أي نقطة في π . من البديهية (3) يوجد مستقيم ℓ بحيث ان $P \notin \ell$ كذلك من البديهية (2) توجد ثلاثة نقاط في الاقل على المستقيم ℓ ولتكن A_1, A_2, A_3 من البديهية (1) توجد المستقيمات PA_1, PA_2, PA_3 التي تمر من P وتكون مختلفة.

نلاحظ : من مبرهنة (1) ان أي مستقيمين في المستوى الاسقاطي يتقاطعان في نقطة واحدة فقط . بتعبير اخر لا يمكن ان تتكلم عن المستقيمات المتوازية او المستقيمات التي لا تتقاطع لهذا لا يمكن ان تكون هذه المستقيمات في المستوى الاسقاطي .

المستوى الاسقاطي المنتهي:

هو مجموعة منتهية (من النقاط و المستقيمات) تحقق بديهيات المستوي الاسقاطي من (1) – (4) .

مبرهنة (3): اذا وجدت بالضبط n من النقاط على مستقيم لمستوى اسقاطي منتهي فأن المستوى يحتوي بالضبط على $n^2 - n+1$ من النقاط .

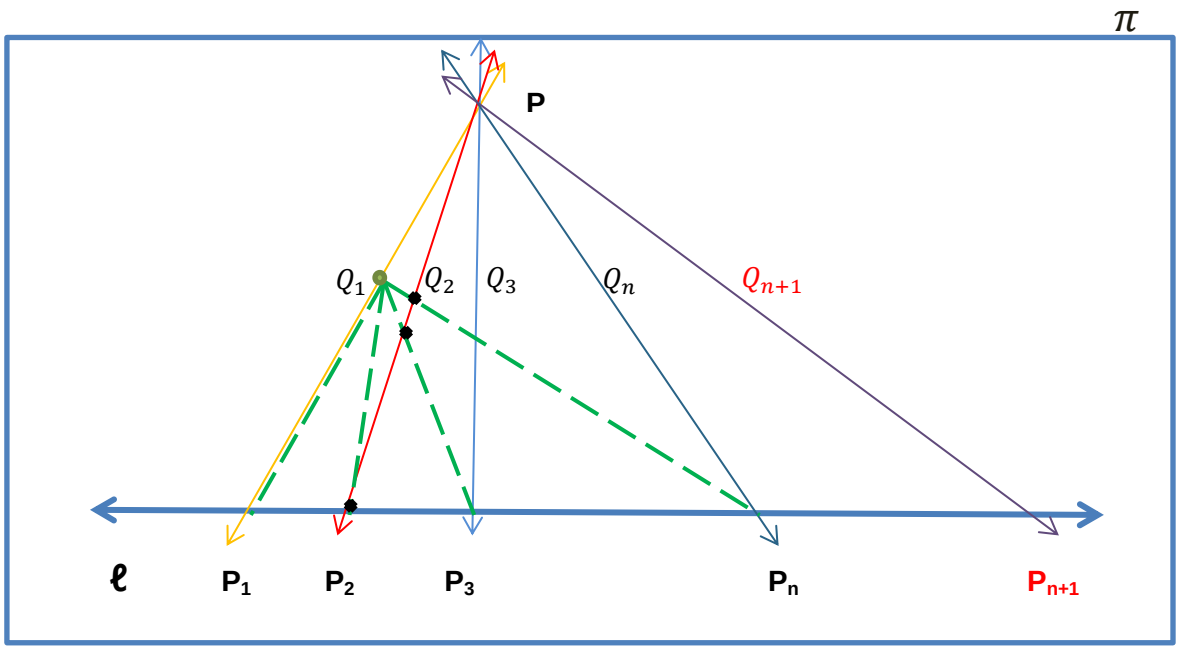
المعطيات : ليكن ℓ مستقيم في مستوى اسقاطي منتهي π ، ℓ يحتوي بالضبط على n من النقاط.

المطلوب اثباته : المستوى الاسقاطي المنتهي يحتوي بالضبط على $n^2 - n+1$ من النقاط .

البرهان :

ليكن ℓ مستقيما يحتوي بالضبط على n من النقاط ولتكن $P_1, P_2, \ldots, P_n$ من البديهية (3) توجد نقطة P لا تقع على ℓ من البديهية (1) توجد n من الخطوط المختلفة

$PP_1, PP_2, \ldots PP_n$ ومن البديهية (2) توجد نقطة ثالثة على كل خط من هذه الخطوط ولتكن $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ على التوالي نأخذ النقطة Q1 ونصلها بالنقاط $P_1, P_2, \ldots P_n$ فنحصل على



n من الخطوط $Q_1P_1, Q_1P_2, \ldots, Q_1P_n$ هذه الخطوط تقطع PP_2 في n-1 من النقاط المختلفة لذلك PP_2 يحتوي على n – 1 من النقاط عدا P ان هذا يصح لكل من المستقيمات $PP_1, PP_2, \ldots PP_n$ وبهذا يوجد n من الخطوط وكل خط منها يحتوي على n – 1 من النقاط ومع النقطة P يحتوي المستوى $n(n-1)+1 = n^2 - n + 1$ من النقاط في الاقل .

لكي نبرهن ان المستوى يحتوي على $n^2 - n + 1$ من النقاط على الاكثر نفرض وجود نقطة Q لا تقع على اي مستقيم من تلك المستقيمات , المستقيم QP يختلف عن المستقيمات المذكورة , من المبرهنة (1) QP يقطع ℓ في نقطة P_{n+1} التي تختلف عن النقاط $P_1, P_2, \ldots, P_n$ وبهذا يحتوي ℓ على n+1 من النقاط وهذا يخالف الفرض { كون ℓ يحتوي بالضبط على n من النقاط } بهذا فقد برهنا على ان المستوى يحتوي بالضبط على $n^2 - n + 1$ من النقاط .

لقد ذكرنا في هذه المبرهنة على انه اذا كان المستقيم يحتوي على n من النقاط فأن أي مستقيم اخر يحتوي ايضا على n من النقاط . لذلك نستنتج النتيجة التاليـــــة :

نتيجة : اذا كان في المستوى الاسقاطي المنتهي مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط فأن أي مستقيم اخر يحتوي بالضبط على n من النقاط . (واجب)

سؤال ؟

- اذا كان مستقيم في المستوي الاسقاطي المنتهي يحتوي على (4) نقاط فكم نقطة يحتوي هذا المستوي ؟
- اذا كان المستوي الاسقاطي المنتهي يحتوي على (7) نقاط فكم عدد النـقاط على كل خط في هذا المستوي ؟
- اذا كان ℓ في المستوي الاسقاطي يحتوي على (6) نقاط فكم نقطة يحتوي المستقيم m الواقع في هذا المستوي .

المستوي التآلفي (Affine Plane)

يتكون المستوي التآلفي α من مجموعة كلمات اولية تقنية [نقاط ونرمز لها بحروف كبيرة A,B,C... ومستقيمات ونرمز لها بحروف صغيرة ℓ , m,...] ومجموعة البديهيات كما يلي :

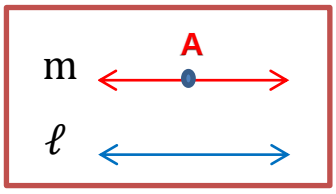
البديهية (1) و(2) و(3) نفس بديهيات المستوي الاسقاطي

امـــا البديهـية (4) فهي اذا كان ℓ مستقيما و A نقطة بحيث $A \notin \ell$ فأنه يوجد مستقيم واحد فقط m يحتوي A بحيث ان $\ell \cap m = \emptyset$.

تعريف : يقال لمستقيمين مختلفين انهما متوازيان اذا كان $\ell \cap m = \emptyset$

من هذا التعريف يمكن ان نعيد نص بديهية (4) بالشكل التالي :

اذا كان ℓ مستقيما و A نقطة بحيث ان $A \notin \ell$ فأنه يوجد مستقيم واحد فقط m يمر من A ويوازي ℓ.



مبرهنة (4): أي مستقيمين مختلفين في مستوى تألفي يشتركان في نقطة واحدة على الأكثر .

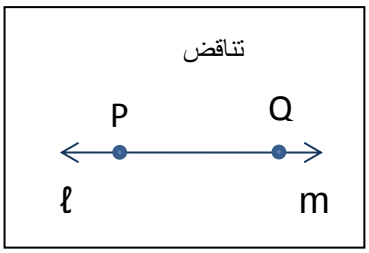
المعطيات : ليكن ℓ , m مستقيمين مختلفين في المستوي الاسقاطي π ، $\ell \neq m$.

المطلوب اثباته : ℓ , m يشتركان في نقطة واحدة على الأكثر .

البـــرهـــان :-

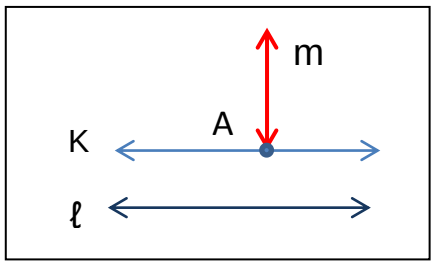
ليكن المستقيمان ℓ و m يشتركان في نقطتين في الاقل Q وP من البديهية (1) ينتج ان

ℓ = m وهذا تناقض { كون ℓ ≠ m بالمعطيات} لذلك فأن اي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة علـى الاكثـر أي ان أي مستقيمين اما يكونا متوازيين او يتقاطعان في نقطة واحدة فقط .



مبـرهنـــة (5) : في المستوي التآلفي اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين فأنه يجب ان يقطع الاخر .

المعطيات : ليكن ℓ , K مستقيمين متوازيين في المستوي التآلفي α ، m مستقيم اخر يقطع K في نقطة A.



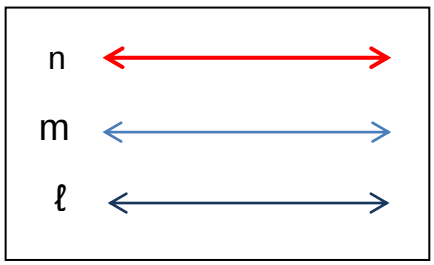
المطلوب اثباته : m يقطع ℓ .

البـــرهـان :-

ليكن K, ℓ مستقيمين متوازيين وان m مستقيم اخر يقطع K في نقطة A . نفرض ان m يوازي ℓ فأنه من A سيكون هنالك المستقيمان m, K يوازيان ℓ وهذا يخالف البديهية (4) { اذا كان ℓ مستقيما و A نقطة بحيث A ∉ ℓ فأنه يوجد مستقيم واحد فقط m يحتوي A بحيث ان ℓ ∩ m = ∅ }

لذلك m لا يمكن ان يوازي ℓ وبهذا يكون m يقطع ℓ وهو المطلوب .

مبـــرهـنة (6) : في المستوي التآلفي المستقيمان الموازيان للمستقيم نفسه متوازيان .



المعطيات : في المستوي التآلفي α ليكن ℓ // n , ℓ // m .

المطلوب اثباته : n // m .

البـــرهـان :-

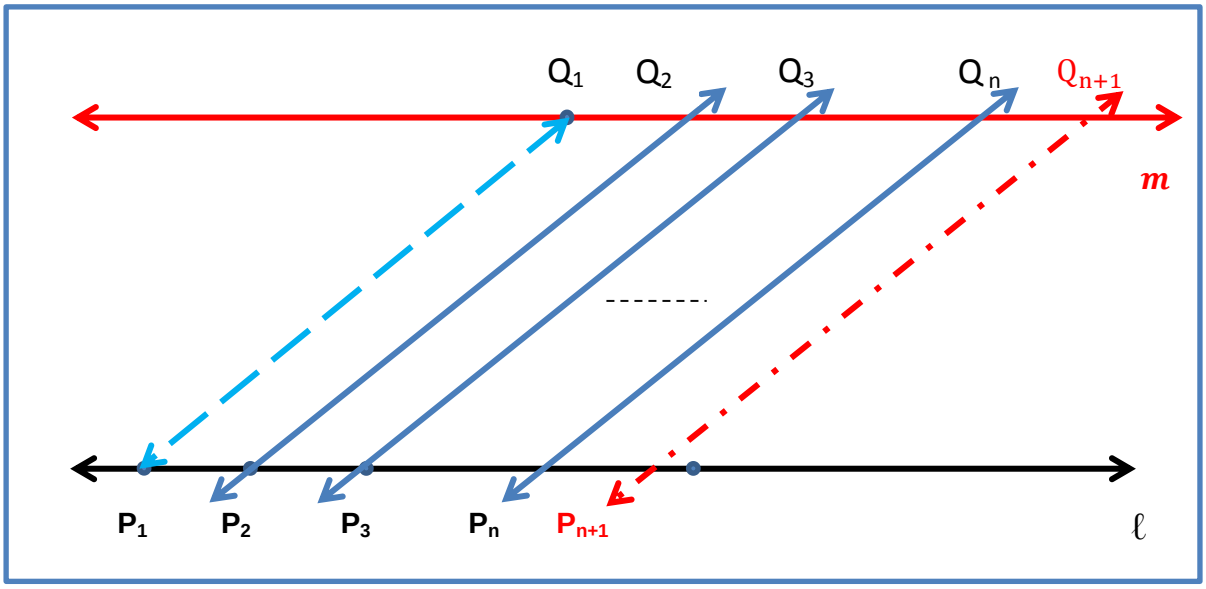
نفرض ان n ⫽ m (n لايوازي m) أذن n يقطع m , من المبرهنة (5) ينتج ان n يقطع ℓ {وهذا يتناقض المعطيات كون ℓ // n } أذن يجب ان يكون n // m وهو المطلوب.

المستوى التألفي المنتهي : هو مجموعة منتهية (من النقاط و المستقيمات) تحققت البديهيات من (1) الى (4) للمستوى التألفي.

مبـــرهـنة (7): في المستوي التآلفي α اذا وجد مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط فأن أي مستقيم يوازي ℓ يحتوي بالضبط على n من النقاط .

المعطيات : في المستوي التآلفي α ليكن ℓ مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط , $m \parallel \ell$.

المطلوب اثباته : المستقيم m يحتوي بالضبط على n من النقاط .



البـــرهـــان : نفرض ان ℓ مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقـــاط $P_1,P_2,...P_n$ وليكن m اي مستقيم بحيث $m \parallel \ell$

يجب ان نبرهن ان m يحتوي بالضبط على n من النقـاط

من البديهية (2) ← توجد نقطة Q_1 على m

من البديهية (2) ← يوجد المستقيم P_1Q_1

من البديهية (4) ← توجد بالضبط n – 1 من المستقيمات الموازية الى P_1Q_1 من النقاط $P_2,P_3,...P_n$

من المبرهنة (6) ← هذه المستقيمات تكون متوازية

من المبرهنتين (4) و(5) ← تقطع هذه المستقيمات المستقيم m في n – 1 من النقاط المختلفة ولتكن $Q_2,Q_3,...Q_n$ والتي تختلف عن Q_1 (من تعريف التوازي)

من هذا نستنتج انه توجد على الاقل n من النقاط على m

لكي نبرهن على وجود على الاكثر n من النقاط على m نفرض وجود نقطة اخرى ولتكن $Q_n + 1$ علـــى m

من البديهية (4) ← يوجد مستقيم يمر من Q_{n+1} يوازي P_1Q_1

من المبرهنتين (4) و (5) ← هذا المستقيم يقطع ℓ في نقطة غير النقاط $P_1,P_2,\ldots,P_n$

وهذا يخالف الفرض .

حيث ℓ يحتوي بالضبط على n من النقاط ولذلك فأن m يحتوي بالضبط على n من النقاط .

نظاما يونك و فانو : The Systems of Young and Fano

نظام يـــونك :

هو نظام بديهي يشمل على نفس بديهيات المستوى التألفي ويشمل بالاضافة الى ذلك البديهية التالية :

بديهية (5) اذا كان ℓ مستقيما فأنه توجد على الاكثر ثلاث نقاط تقع على ℓ.

ملاحظة :- هذه البديهية مع البديهية (2) تجعل هذا النظام هندسة منتهية .

مبرهنة (10) يحتوي النظام على تسع نقاط فقط (البرهان واجب)

مبرهنة (11) يحتوي النظام على اثنى عشر مستقيم فقط (البرهان واجب)

مبرهنة (12) اي نقطة يمر بها اربعة مستقيمات فقط (البرهان واجب)

نظام فـــانـــو :

اذا اضفنا البديهية (5) الى المستوى الاسقاطي سنحصل على نظام فانو . ان نظام فانو منتهي ايضا حيث ان المستقيم فيه يحتوي على ثلاثة نقاط فقط وعدد النقاط والخطوط فيه منتهي.

مبرهنة (13) يحتوي نظام فانو على سبعة نقاط فقط (البرهان واجب)

مبرهنة (14) يحتوي نظام فانو على سبعة مستقيمات فقط (البرهان واجب)

مبرهنة (15) أي نقطة يمر بها بالضبط ثلاث مستقيمات (البرهان واجب)

الفصـــل الثانـــــي

خـواص النظـام البـديهـي

في أي نظام بديهي توجد ثلاثة مفاهيم مهمة هي

1- الاتساق 2- الاستقلال 3- التمام

1- **الاتساق (Consistency)** يكون النظام البديهي متسقا اذا وفقط اذا لا توجد في النظام اي بديهيتين او بديهية ومبرهنة او أي مبرهنتين بالشكال (P , ~P) أي بمعني لا يوجد بينهما تناقض.

❖ ان النظام الذي يكون فيه عبارة ما ونفيها صحيحا يكون نظاما لا معنى له .

تعريف : تفسير النظام البديهي هو اعطاء معاني في الكلمات الاولية التقنية بطريقة بحيث تصبح البديهيات اما صائبة او خاطئة .

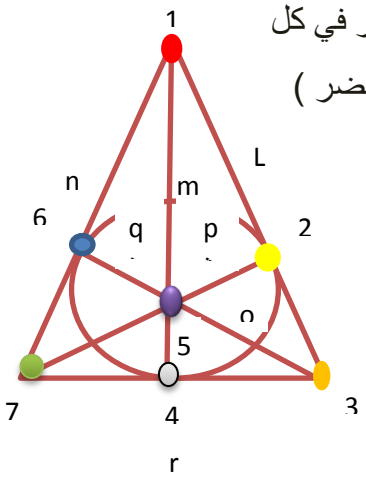
تعريف : يقال للتفسير الذي يجعل كل بديهية في مجموعة من بديهيات صائبة بأنه نموذج (Model) .

طريـقة اختبار الاتساق : اذا وجد نموذج لمجموعة من بديهيات فأن المجموعة تكون منسقة اذا وجد نموذج لمجموعة من بديهيات فأن جميع البديهيات في النظام تكون عبارات صحيحة .

نماذج عن الاتساق :

نموذج (1) الهندسة الاقليدية الاعتيادية حيث ان الهندسة الاقليدية تعتبر نموذجا يتحقق فيه كل البديهيات المستوي التآلفي .

نموذج (2) : يقوم صاحب محل صياغة بصنع حلية مكونة من سبع خرزات مختلفة الالوان وقد ربطها بسبعة اسلاك بحيث انـه توجد ثلاثة خرزات في كل سلك ، وثلاث اسلاك تمر في كل خرزة الالوان (الاصفر , الاحمر , البرتقالي , الابيض , البنفسجي, السماوي ,الاخضر) ان الحلية بدت كما في الشكل التالي:



في هذا النموذج تفسر (الخرزة)على انها نقطة و الاسلاك على انها مستقيم

وفي الجدول (النقطة) تمثل بعدد و(المستقيم) بعمود

L	m	n	o	p	q	r
1	1	1	2	2	3	3
2	5	6	4	5	5	4
3	4	7	6	7	6	7

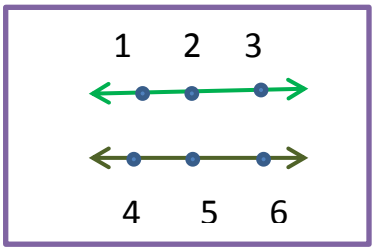
ان النموذج السابق يبين ان نظام فانـــو متســـق

2- الاستقلال (Independence)

تعني الاستقلالية انه لا يوجد بديهية في النظام يمكن برهنتها من بقية البديهيات في النظام ففي هذه الحالة يمكن اعتبارها كمبرهنة .

تعريف : يقال عن عبارة انها مستقلة في مجموعة من عبارات اذا لم نتمكن من اشتقاقها من بقية العبارات في المجموعة .

طريقة اختبار الاستقلال : اذا كانت مجموعة بديهيات متسقة فعندما تبدل العبارة (المراد اختبارها) بنفيها للنظام الجديد فأن العبارة المراد اختبارها تكون مستقلة .



مثال على استقلال البديهية (1) :في نظام يونك

ليكن $\ell = \{1, 2, 3\}$, $m = \{4, 5, 6\}$ و ℓ ,m مستقيمات

1,2,3,4,5,6 نقاط

نفي بديهية (1) : اي نقطتين مختلفتين يحويهما مستقيم واحد فقط .

النفي متحقق هنا لان النقطتين 1,4 على سبيل المثال لا يوجد مستقيم يحويها

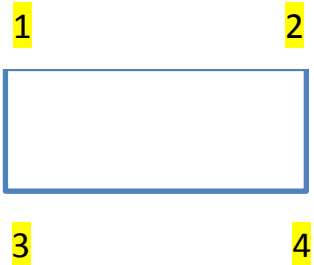
البديهية (2) متحققة لان كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط .

البديهية (3) متحققة لانه على سبيل المثال يوجد المستقيم ℓ وتوجد النقطة 4 مثالا تنتمي اليه .

البديهية (4) متحققة لانه اذا اخذنا المستقيم ℓ والنقطة 6 مثلا لا تنتمي اليه فيوجد المستقيم m يمر من النقطة 6 (او يحوي 6) وكذلك m لا يتقاطع مع ℓ اي لا يوجد نقاط مشتركة بينهما لذلك فأن بديهية (1) مستقلـــة .

مثال على استقلال البديهية (2):في المستوي التآلفي (4 نقاط , 4 مستقيمات)

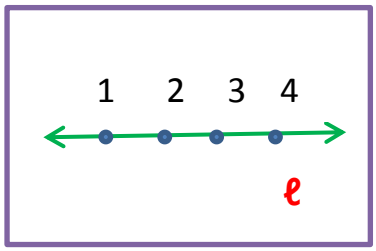
1. البديهية (1) [اي نقطتين يحتويهما مستقيم واحد فقط] متحققة
2. البديهية (2) كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل النفي هو[يوجد مستقيم لا يحتوي على ثلاث نقاط وهذه البديهية متحققة لان كل مستقيم يحتوي على نقطتين] .
3. البديهية (3) متحققة [يوجد في الاقل مستقيم ونقطة بحيث النقطة لا تنتمي الى المستقيم]
4. البديهية (4) متحققة [من نقطة لا تنتمي الى المستقيم يوجد مستقيم واحد فقط يمر من هذه النقطة ويوازي المستقيم المعلوم]



مثال على استقلال البديهية (3) : (4 نقاط و مستقيم واحد) في المستوي التآلفي $\ell=\{1,2,3,4\}$

1. البديهية الاولى : متحققة لان النقطتين {1,2} يوجد المستقيم ℓ يحويها وهو الوحيد .

النقطتين {1,3} يوجد المستقيم ℓ يحويها وهو الوحيد .



النقطتين {1,4} يوجد المستقيم ℓ يحويها وهو الوحيد .

النقطتين {2,3} يوجد المستقيم ℓ يحويها وهو الوحيد .

النقطتين {2,4} يوجد المستقيم ℓ يحويها وهو الوحيد .

النقطتين {3,4} يوجد المستقيم ℓ يحويها وهو الوحيد .

2. البديهية الثانية : متحققة لأنه المستقيم الوحيد الموجود يحتوي على اربع نقاط .

3. البديهية الثالثة : [توجد في الاقل نقطة واحدة A ويوجد في الاقل خط واحد ℓ بحيث $A \notin \ell$

نفي هذه البديهية هو لا توجد نقطه A بحيث $A \notin \ell$

4. البديهية الرابعة متحققة لأنه لا يوجد نقطة لا تنتمي الى ℓ . اذن البديهية (3) مستقلة .

مثال على استقلال البديهية (4) في نظام فانو: في نموذج الحلية (2) البديهيات

(1) و(2) و (3) متحققة اما البديهية الرابعة (من نقطة لا تنتمي الى المستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر من هذه النقطة ويوازي المستقيم المعلوم .)

نفيها هو (من نقطة لا تنتمي الى المستقيم لا يوجد مستقيم يمر من هذه النقطة ويوازي المستقيم المعلوم) أي بمعنى لا توجد خطوط متوازية والنموذج (2) فيه كل المستقيمات متقاطعة.

أذن البديهية (4) متحققة.

ملاحظة : الاستقلالية هي غير اساسية حيث اذا وجدت احدى البديهيات غــير مستقلة أي لانها مبرهنة فبدلا من ان توضع في مجموعة البديهيات توضع في مجموعة المبرهنــات .

3. التمـــام Completeness

يكون النظام البديهي غير تام اذا امكن اضافة بديهية مستقلة اما اذا لم تتمكن من اضافة مثل هذه البديهية فأن النظام يكون تام .

يكون المستوى الاسقاطي غير تاما وكذلك المستوى التألفي

بينما نظام يونك يكون تاما وكذلك نظام فانو (لماذا ؟) (واجب)

ملاحظة :- التمامية هي خاصية ليست اساسية وبصورة عامة غير مفضلة .